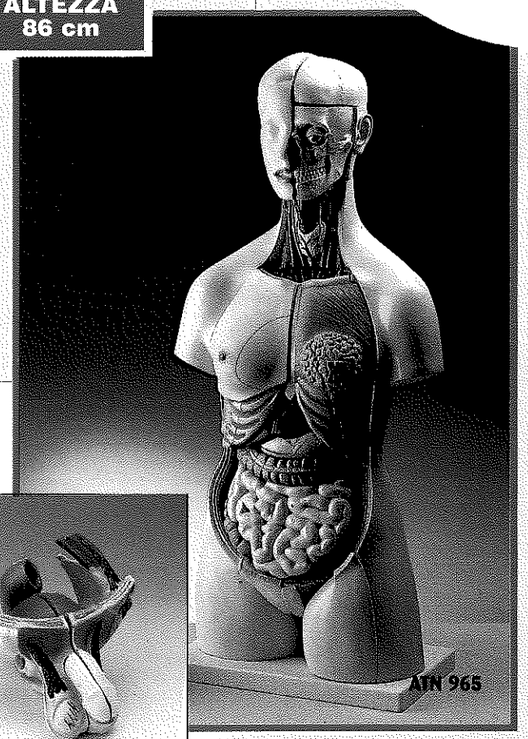
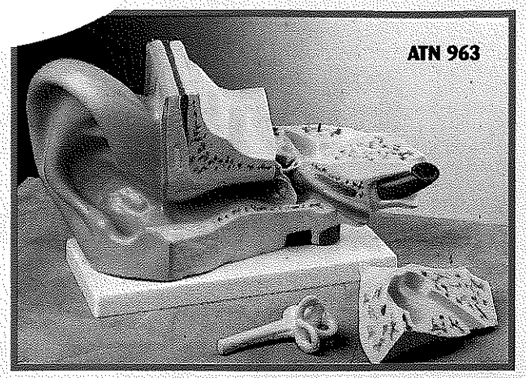
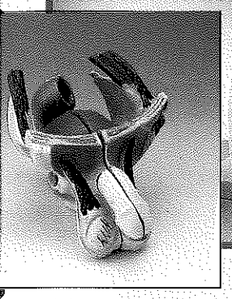
MODELLI DI ANATOMIA

ALTEZZA 86 cm







ORGANO DELL'UDITO

NOVITÀ

• **56963 ATN 963** - L. 150.000

Modello molto ingrandito (cm 33 x 15 x 25/h). Scomponibile in 4 parti, per evidenziare tutta la struttura interna dell'organo.

ALVEOLI POLMONARI

NOVITÀ

• **56961 ATN 961** - L. 150.000

Modello ingrandito (h 37 cm). Visibili, in rilievo, le vene e le arterie.

CERVELLO

NOVITÀ

• **56962 ATN 962** - L. 120.000

Cervello in grandezza naturale, scomponibile in 8 parti, che ne permettono di evidenziare le più importanti particolarità anatomiche.

SEZIONE DELLA PELLE

NOVITÀ

• **56964 ATN 964** - L. 150.000

Sezione molto ingrandita (cm 27,5 x 12,5 x 34/h) che visualizza, in rilievo, gli strati costitutivi della pelle. Sono visibili le ghiandole sudoripare e sebacee, i bulbi dei peli, le arterie, le vene ecc.

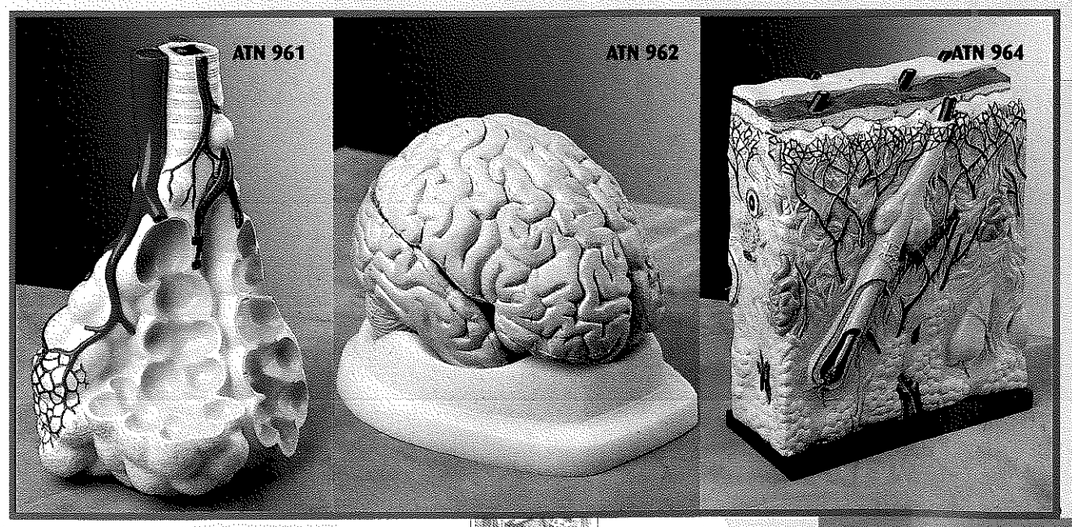
TRONCO UMANO

NOVITÀ

• **56965 ATN 965** - L. 720.000

Tronco scomponibile in 38 parti che evidenzia gli organi interni anteriori e posteriori, completo di organi genitali femminili e maschili intercambiabili. La testa e l'emisfero cerebrale, parte della coscia e torso sono staccabili dal tronco.

I prezzi sono comprensivi di IVA. V.P.C.
Ordini a **EDITRICE LA SCUOLA** - 25186 Brescia



Bimestrale per l'insegnamento delle scienze e della matematica - Anno XXXIV - n. 6 fascicoli all'anno - Direttore Responsabile: Luigi Morgano - Autorizzazione del Tribunale di Brescia n. 228 del 31 marzo 1965 - Sped. in abbonamento postale/45% - Art. 2, Comma 20/b, Legge 662/96 - Filiale di Brescia (Italia) - **Direzione, Redazione, Amministrazione:** La Scuola S.p.A. - 25186 Brescia, Via Luigi Cadorna, 11 - Conto corrente postale n. 14407258 - Codice fiscale - Partita I.V.A. n. 00272780172 - Tel. centr. (030) 2993.1 - Tel. Ufficio Abbonamenti (030) 2993.286 - (030) 2993.246 - Telefax (030) 2993.299. **Filiali: 20136 Milano** (Viale Bligny, 7, Tel. (02) 58300261 - 8353716 - Telefax (02) 8353716); **00193 Roma** (Via Crescenzio, 23, Tel (06) 6875179 - 68803989 - Telefax (06) 6874939); **80137 Napoli** (Salita S. Elia, 19/21, Tel. (081) 441200 - 441308 - Telefax (081) 441934); **70124 Bari** (Via Giulio Petroni, 21 A/E - Tel. (080) 5428647 - Telefax (080) 5428647); **65124 Pescara** (Via Donatello, 7/11, Tel. (085) 74792 - Telefax (085) 74792); **35129 Padova** (Via della Croce Rossa, 116 - Tel. (049) 8076775 - 8076776 - Telefax (049) 8076776). **Pubblicità:** Ufficio Inserzioni Pubblicitarie Editrice La Scuola - Via Cadorna, 11 - 25186 Brescia - tel. (030) 2993.287 - Telefax (030) 2993.299. **Abbonamento annuo** 1998-99 L. 66.000 pagabile in un'unica soluzione (estero via terra/mare L. 73.500 - tariffe differenziate per via aerea) - Il presente fascicolo L. 11.000 (arretrato il doppio). **L'impegno di abbonamento è continuativo,** salvo regolare disdetta da notificarsi a mezzo lettera raccomandata. Stampa: OFFICINE GRAFICHE LA SCUOLA - 25186 BRESCIA.

DIDATTICA DELLE SCIENZE
e informatica nella scuola

200 febbraio 1999 - anno XXXIV

direttore
Mauro Laeng, docente di Pedagogia all'Università di Roma

comitato di redazione
Giuseppe Luciano (caporedattore)
Angelo Borgese, Gemma Colosio, Mario Ferrari, Marina Gandellini, Teresita Giliani, Cecilia Mazzocchi, Pierluigi Pizzamiglio, Ennio Provera, Maria Pia Rigobello
Curatela redazionale Laura Pasolini

In copertina

Il virus della varicella.

Didascalia a p. 64.

(Foto: *Farabolafoto / Overseas*)

3 ***Mauro Laeng***
Editoriale

5 ***Salvatore Marseglia***
Una questione di didattica

9 ***Mario Guerrini***
La pila da Volta ai giorni nostri

14 ***Anna De Marzi, Claudio Olivari***
Eutrofizzazione. Misure qualitative del contenuto di fosfato inorganico nei detersivi

18 ***Piero Pistoia***
Un possibile «racconto» sull'attrazione gravitazionale

22 ***Nicoletta Sala***
Matematica, arte e architettura

30 ***Marco Calvani***
Equazioni di 2° grado in due variabili

38 ***Adriana Daneri Colonelli, Francesca Gaetani***
Maturità scientifica sperimentale 1998. Tema di matematica

45 ***Paolo Rocchi***
L'informatica riunisce formazione e tecnologia

49 ***Elisabetta Porrera***
Dal museo virtuale al museo reale

53 Prova: è facile
Meri Murgia
Piante nello spazio

Italo D'Ignazio
Ricerca di luoghi geometrici con l'aiuto di Cabri-Géomètre

58
Asterischi

61
Notiziario

63
Recensioni

Progetto Grafico di *Giuliano Prati*

Ad ogni comunicazione o richiesta riguardante la rivista i sigg. abbonati sono pregati di allegare una copia del talloncino-indirizzo col quale la rivista stessa viene loro spedita.

EQUAZIONI DI 2° GRADO IN DUE VARIABILI

Marco Calvani

L'articolo nasce con lo scopo di fornire un programma in linguaggio Pascal (versione 4.0 e successive) che, data una equazione di secondo grado in due variabili, classifica la conica corrispondente secondo la geometria euclidea e, nel caso in cui si tratti di una conica non degenere e a punti reali, la rappresenta graficamente nel piano cartesiano assieme ai suoi assi di simmetria ed eventuali asintoti.

Introduzione

Si è talmente abituati a mostrare agli studenti delle scuole superiori grafici di coniche con equazioni in forma canonica o con assi paralleli agli assi cartesiani al punto, talvolta, di perdere e far perdere il significato ben più vasto del concetto di conica.
Il programma riportato più avanti permette di rappresentare graficamente le curve «non standard» in maniera piuttosto semplice.

Possibili utilizzazioni del programma ed interesse didattico

In campo informatico si può proporre il programma a studenti che abbiano affrontato le coniche anche attraverso *software* didattici: può essere lo spunto sia per riflettere sul fatto che tali *software* per le scuole superiori (tipo *Derive* ed altri) rappresentano nel piano cartesiano solo grafici di funzioni, in equazione cartesiana, e non curve assegnate in equazione cartesiana, sia per soffermarsi sulla distinzione tra equazione in forma cartesiana implicita ed esplicita.
Inoltre, se si lavora con *Cabrì*, dopo aver osservato che il comando <coniche> permette di tracciare una conica irriducibile casualmente nel piano e quindi (con il comando <coordinate ed equazioni>) ricavare la sua equazione in forma cartesiana implicita, si può ad esempio proporre la soluzione del problema inverso tramite il programma.
Un ulteriore vantaggio didattico consiste nel permettere allo studente di usufruire di un mezzo che gli consentirà di «provare» un congruo numero di curve e lo aiuterà a capire il significato dei dati che inserisce, oltre ad applicare delle formule che, se studiate isolatamente, non sembrano avere molto significato.
I conti più pesanti vengono svolti dal computer, lo studente ha il compito di prevedere ciò che apparirà sullo schermo, avrà il compito di controllare la «macchina», verificare la logica del programma, implementarlo. Imparerà anche che la matematica non è solo «fare i conti»[2] o che comunque i conti non sono sempre obbligatori e talvolta si possono far svolgere a qualcun altro.

«La matrice
è come un oceano senza orizzonte,
uno sconfinato reticolo primordiale
e pulsante,
avverto le correnti
nelle sue profondità, un flusso
che nasce e muore e si rigenera di continuo
costruzione, dissolvenza, ricostruzione.
Dimensioni che si intersecano
fatte di tempo e di spazio in
continuo mutamento solo qui io mi sento
davvero vivo.
Solo qui posso comprendere la vera
essenza di un universo
che va oltre ogni umana immaginazione».[1]

Le conoscenze di base richieste sono:
- nozioni relative alla programmazione in linguaggio Pascal ed elementi di grafica,
- conoscenza del concetto di matrice,
- trasformazioni nel piano,
- autovalori ed autovettori,
- operazioni sulle matrici,
- equazione di una conica in forma canonica cartesiana e parametrica.

Si suggerisce di utilizzare e approfondire solo i concetti più interessanti per la classe, relativi agli argomenti che si stanno affrontando, senza perdere di vista l'obiettivo principale che è quello di «fare matematica» e costruire un esperimento che aiuti la comprensione dei concetti base.
Per esempio la procedura, all'interno del programma, che applica traslazioni ed omotetie sullo schermo e permette di rimpicciolire, ingrandire e centrare l'immagine, è particolarmente interessante perché applica le leggi di trasformazione nel piano ed è di facile comprensione da parte degli studenti che potrebbero, con qualche aiuto introduttivo, crearla autonomamente.

La soluzione del problema

Si parte da un assunto: un qualsiasi *software* di grafica, anche il Pascal, rappresenta grafici di funzioni o al massimo curve in equazione parametrica.
Data l'equazione di secondo grado in due variabili la si rappresenta in forma matriciale (vedi formula (1)) e dallo studio della **matrice associata** (v. paragrafo successivo) si procede alla prima classificazione: degenere o generale.
Tramite la matrice dei termini di 2° grado, estratta dalla matrice associata (il complemento algebrico del termine noto), si passa alla successiva classificazione: ellisse[3], iperbole o parabola.

Si ricavano poi le equazioni degli assi di simmetria e, quindi, le isometrie che fanno ottenere l'equazione canonica corrispondente e la relativa equazione in forma parametrica.
Si applica la trasformazione inversa alle equazioni parametriche ottenute ed il gioco è fatto.

Con una procedura che applica traslazioni ed omotetie sullo schermo si può rimpicciolire, ingrandire e centrare l'immagine; questa parte del programma è particolarmente interessante e di facile comprensione per gli studenti.
Nel paragrafo seguente viene descritta la procedura teorica seguita per l'individuazione dell'algoritmo risolutivo e, nei riquadri alle pagine 33-37, è riportato il listato del programma.

La teoria[4]

Definizione. Sia fissato un sistema di riferimento con origine O e unità U ed assi x, y, si chiama **conica** una curva avente equazione cartesiana del tipo $f(x,y) = 0$ con $f(x,y)$ polinomio di secondo grado in due variabili determinato a meno di un fattore di proporzionalità non nullo, scrivibile nella forma:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Definizione. Si chiama **matrice associata** la matrice di ordine tre, M, così definita:

$$M = \begin{pmatrix} a & \frac{c}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{c}{2} & b & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{pmatrix}.$$

Nota. Si pone $N = M_{33}$; quindi N è la matrice quadrata M_{33} di ordine due, estratta dalla matrice M, ottenuta cancellando la terza riga e la terza colonna cioè:

$$M = \begin{pmatrix} a & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} & b \end{pmatrix}.$$

La matrice M è simmetrica cioè ${}^tM = M$ (con ${}^tM$ si indica la **matrice trasposta**).
L'equazione della conica espressa in forma matriciale diventa:

$${}^tX\, M\, X = 0, \quad \text{dove } M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Fissato un altro sistema di riferimento con origine $O'(x_0;y_0)$ ed asse x' che formi con l'asse x un angolo ϕ orientato in senso antiorario sia:

$$X' = C\, X$$

la formula di trasformazione delle coordinate con

$$C = \begin{pmatrix} \cos\phi & \operatorname{sen}\phi & x_0 \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'equazione della conica nel nuovo sistema di riferimento sarà:

$${}^tX'\, M'\, X' = 0$$

con

$$M' = {}^tC\, M\, C.$$

Quindi, dall'ultima identità si ha: $\operatorname{rg}(M') = \operatorname{rg}(M)$ (dove «rg» sta per **rango**), $\det(M') = \det(M)$, $\det(N') = \det(N)$, $\operatorname{tr}(M') = \operatorname{tr}(M)$ (dove «tr» sta per **traccia**).
Tali valori non possono a priori avere un significato geometrico perché l'equazione di una conica è definita a meno di un fattore di proporzionalità.
Variando, però, l'equazione della conica nella forma (1) per un fattore di proporzionalità, non varieranno $\operatorname{rg}(M)$, il segno del $\det(N)$, il segno di $\det(M)\operatorname{tr}(N)$ che chiameremo **invarianti metrici**.

Definizione. Una conica nella forma (1), si dice:
- **non degenere** se $\operatorname{rg}(M) = 3$,
- **semplicemente degenere** se $\operatorname{rg}(M) = 2$,
- **doppiamente degenere** se $\operatorname{rg}(M) = 1$.

Definizione. Si chiamano **coniche a centro** quelle coniche non degeneri che possiedono un centro di simmetria.

Teorema. Data una conica non degenere espressa nella forma (1), essa è una conica a centro se e solo se $\det(N) \neq 0$.

Studiamo innanzi tutto le coniche a centro.
È possibile operare un cambiamento di riferimento in modo tale che l'equazione della conica (1) nel nuovo riferimento risulti:

$$a'\, x^2 + b'\, y^2 + f' = 0.$$

La matrice associata alla conica in questo nuovo sistema di riferimento è quindi:

$$M' = \begin{pmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & f' \end{pmatrix}.$$

Per quel che si è detto sugli invarianti si ha quindi:

$$f' = \frac{\det(M')}{\det(N')} = \frac{\det(M)}{\det(N)}.$$

Le matrici N' e N hanno lo stesso polinomio caratteristico e quindi gli stessi autovalori. Da ciò segue che nell'ultima equazione a', b' sono uguali agli autovalori μ_1, μ_2 della matrice N; essi sono quindi le radici dell'equazione:

$$\mu^2 - \operatorname{tr}(N)\, \mu + \det(N) = 0.$$

Da ciò segue che l'equazione della conica nel nuovo sistema di riferimento può essere scritta nella forma seguente:

$$\mu_1 x'^2 + \mu_2 y'^2 + \frac{\det(M)}{\det(N)} = 0.$$

Con ulteriori calcoli si ottiene:

$$\frac{x'^2}{\frac{\det(M)}{\mu_1 \det(N)}} + \frac{y'^2}{\frac{\det(M)}{\mu_2 \det(N)}} + 1 = 0.$$

Distinguiamo vari casi:

$$(a) \quad \frac{\det(M)}{\mu_1 \det(N)} > 0; \ \frac{\det(M)}{\mu_2 \det(N)} > 0.$$

La conica è ovviamente priva di punti a coordinate reali e si dice **ellisse a punti immaginari**. Non essendo rappresentabile nel piano reale è per noi priva di interesse. Si nota, tra l'altro, che in questo caso μ_1 e μ_2 sono concordi e quindi $\det(N)>0$. Da qui segue che μ_1, μ_2 e $\det(M)$ sono concordi; le condizioni di cui sopra sono quindi equivalenti alle seguenti condizioni:

$$\det(N)>0 \ ; \ \operatorname{tr}(N)\det(M)>0.$$

(*b*) $\dfrac{\det(M)}{\mu_1\det(N)} < 0;\ \dfrac{\det(M)}{\mu_2\det(N)} < 0.$

Ponendo:

$$\alpha = \sqrt{\left|\frac{\det(M)}{\mu_1\det(N)}\right|},\ \beta = \sqrt{\left|\frac{\det(M)}{\mu_2\det(N)}\right|},$$

la conica assume la seguente forma canonica:

$$\frac{x'^2}{\alpha^2} + \frac{y'^2}{\beta^2} - 1 = 0.$$

La conica è quindi un'**ellisse a punti reali** ed assume la seguente forma parametrica nelle variabili x', y':

$$ELLCAN = [\alpha\cos(t),\ \beta\sin(t)].$$

Notiamo che le precedenti condizioni sono equivalenti alle seguenti condizioni:

$$\det(N)>0\ ;\ \mathrm{tr}(N)\det(M)>0.$$

(*c*) $\dfrac{\det(M)}{\mu_1\det(N)}<0;\ \dfrac{\det(M)}{\mu_2\det(N)}>0.$

Ponendo:

$$\alpha = \sqrt{\left|\frac{\det(M)}{\mu_1\det(N)}\right|},\ \beta = \sqrt{\left|\frac{\det(M)}{\mu_2\det(N)}\right|},$$

la conica assume la seguente forma canonica:

$$-\frac{x'^2}{\alpha^2} + \frac{y'^2}{\beta^2} + 1 = 0.$$

È dunque una **iperbole** ed i suoi rami hanno le seguenti equazioni parametriche nelle variabili x', y':

$$IPER = [\pm\alpha\cosh(t),\ \beta\sinh(t)].$$

(*d*) $\dfrac{\det(M)}{\mu_1\det(N)}>0;\ \dfrac{\det(M)}{\mu_2\det(N)}<0.$

Applicando le medesime identità di cui sopra si ottiene la seguente equazione:

$$\frac{x'^2}{\alpha^2} - \frac{y'^2}{\beta^2} + 1 = 0.$$

È l'equazione dell'**iperbole canonica**: in questo caso le rappresentazioni parametriche dei rami dell'iperbole nel nuovo riferimento x', y' saranno:

$$\mathrm{IPERDUE} = [\alpha\sinh(t),\ \pm\beta\cosh(t)].$$

Mediante l'isometria inversa di quella che manda l'asse x nell'asse x' (di simmetria) della conica e l'origine O nel centro di simmetria, è possibile ottenere la rappresentazione parametrica della conica a centro nelle variabili x, y.

Si devono quindi determinare gli elementi della matrice C, di cambio di coordinate. L'origine $O'(x_0;y_0)$ coincide con il centro $C(x_c;y_c)$, della conica. Le coordinate del centro della conica sono ottenute con il metodo seguente: operiamo una traslazione del sistema di riferimento in modo tale che la nuova origine coincida con C. Le formule di trasformazione delle coordinate per la traslazione sono:

$$\begin{cases} x = x'' + x_0 \\ y = y'' + y_0. \end{cases}$$

Sostituiamo nell'equazione (1) e determiniamo $(x_0;y_0)$ in modo tale che nell'equazione:

$${}^tX''\ M''\ X'' = 0$$

si abbia $\dfrac{d''}{2} = \dfrac{e''}{2} = 0.$

Svolgendo i calcoli si ottiene il seguente sistema nelle variabili x_c e y_c:

$$\begin{cases} \dfrac{d''}{2} = ax_0 + \dfrac{c}{2}y_0 + \dfrac{d}{2} = 0 \\ \dfrac{e''}{2} = \dfrac{c}{2}x_0 + by_0 + \dfrac{e}{2} = 0. \end{cases}$$

Esso ammette una ed una sola soluzione dato che il determinante della matrice dei coefficienti è uguale a $\det(N)$ che è diverso da zero (regola di Cramer).
Le coordinate del centro sono:

$$x_0 = x_c = \frac{ce - 2db}{2\det(N)},$$

$$y_0 = y_c = \frac{cd - 2ae}{2\det(N)}.$$

Si passi ora a studiare gli assi di simmetria della conica a centro (gli assi di simmetria sono ortogonali tra loro).
Distinguiamo in due casi:

1) la conica a centro ha gli assi paralleli agli assi principali ($c = 0$). In questo caso le equazioni degli assi sono:

$$assev:\ x = x_c; \qquad asseo:\ y = y_c;$$

2) Gli assi della conica non sono paralleli agli assi principali ($c \neq 0$). Prendiamo in considerazione gli autovalori μ_1,μ_2 precedentemente introdotti; gli autovettori corrispondenti costituiscono i parametri direttori degli assi. Ricavare i parametri direttori di uno degli assi equivale a risolvere il sistema omogeneo dedotto dalla seguente identità matriciale:

$$(N - \mu_1 I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Poniamo $x = 1$ (il che vale quanto escludere la possibilità che l'asse di simmetria sia parallelo all'asse delle ordinate) e si avrà:

$$a - \mu_1 + \frac{c}{2}y = 0.$$

In conclusione il coefficiente angolare dell'asse di simmetria x' è:

$$k = \frac{2(\mu_1 - a)}{c}.$$

Poniamo come coseni direttori dell'asse x' i seguenti valori:

$$\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}};\ \mathrm{sen}\phi = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}.$$

È da notare che l'orientazione dell'asse x' è ininfluente per la simmetria della conica rispetto agli assi. Si ha allora che le equazioni degli assi x' ed y' sono:

$$asse1(t) = [\cos\phi t + xc;\ \mathrm{sen}\phi t + yc],$$

$$asse2(t) = [-\mathrm{sen}\phi t + xc;\ \cos\phi t + yc].$$

La matrice di cambio di coordinate è quindi:

$$C = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\mathrm{sen}\phi & x_0 \\ \mathrm{sen}\phi & \cos\phi & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Teorema. Data una conica non degenere espressa nella forma (1), essa è una **parabola** se e solo se $\det(N) = 0$.

È possibile effettuare un cambiamento di riferimento in modo che l'equazione della conica risulti:

$$b'\,y'^2 + d'\,x' = 0.$$

La matrice associata è quindi:

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dfrac{d'}{2} \\ 0 & b' & 0 \\ \dfrac{d'}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da ciò segue che $\mathrm{tr}(M') = b'$ e inoltre, dato che $\det(M') = -\dfrac{d'^2}{4}b'$, si ha: $\dfrac{d'}{2} = \pm\sqrt{-\dfrac{\det(M')}{\mathrm{tr}(N')}}.$


```
program grafica;

uses crt,graph;
const maxx = 639; maxy = 500;

var x,y,x2,y2, app1:longint;
      Gd,Gm, xc,yc,pass,j,i:integer;
  deta,
deta1,a,b,c,d,e,f,xcon,ycon,mi1,mi2,k,delta:real;
        xa,xa1,xb,xb1,xe,xe1,xd,xd1: longint;
        ya,yb,ye,yd,ya1,yb1,ye1,yd1:longint;
        cosfi,sinfi,alfa,beta,val,xv,yv: real;
         ca,cosalfa,sinalfa,coorx,coory:real;
  t,corx,cory:real;
        risp:char;

procedure dati_coniche;
  begin
   deta:=a*(b*f-e*e/4)-(b*d*d+c*(c*f-d*e))/4;
   deta1:=a*b-c*c/4;
  end;

function sinh(t:real):real;
 var din: real;
 begin
  sinh:=(exp(t)-exp(-t))/2
 end;

function cosh(t:real):real;
 var don:real;
  begin
   cosh:=(exp(t)+exp(-t))/2
  end;

procedure assegen1;
begin
  mi1:=sqrt(sqr(a)+2*a*b+sqr(b) -
4*deta1)/2+a/2+b/2;
  mi2:=-sqrt(sqr(a)+2*a*b+sqr(b) -
4*deta1)/2+a/2+b/2;
  k:=2*(mi1-a)/c;
  xcon:=(c*e-2*d*b)/(4*deta1);
  ycon:=(c*d-2*a*e)/(4*deta1);
  cosfi:=1/sqrt(1+sqr(k));
  sinfi:=k/sqrt(1+sqr(k));
  coorx:=cosfi*t+xcon;
  coory:=sinfi*t+ycon
end;

procedure assegen2;
begin
 coory:=cosfi*t+ycon;
 coorx:=-sinfi*t+xcon
end;

procedure asseor1;
begin

 mi1:=sqrt(sqr(a)+2*a*b+sqr(b) -
  4*deta1)/2+a/2+b/2;
   xcon:=(c*e-2*d*b)/(4*deta1);
   ycon:=(c*d-2*a*e)/(4*deta1);
   coorx:=xcon;
  coory:=t;
  end;

procedure asseor2;
begin
  coory:=ycon;
  coorx:=t;
end;

procedure asintotogen1;
 begin
  alfa:=sqrt(abs(deta/(mi1*deta1)));
  beta:=sqrt(abs(deta/(mi2*deta1)));
  coorx:=alfa*cosfi*t-beta*sinfi*t+xcon;
  coory:=alfa*sinfi*t+beta*cosfi*t+ycon
 end;

procedure asintotogen2;
 begin
  coorx:=-alfa*cosfi*t-beta*sinfi*t+xcon;
  coory:=-alfa*sinfi*t+beta*cosfi*t+ycon
 end;

procedure asintori;
 begin
  mi2:=-sqrt(sqr(a)+2*a*b+sqr(b) -
4*deta1)/2+a/2+b/2;
  alfa:=sqrt(abs(deta/(mi1*deta1)));
  beta:=sqrt(abs(deta/(mi2*deta1)));
  coorx:=-beta*t+xcon;
  coory:=alfa*t+ycon
 end;

procedure asintori1;
 begin
  coorx:=-beta*t+xcon;
  coory:=-alfa*t+ycon
 end;

procedure iperpos;
  begin
   coorx:=-
beta*sinfi*cosh(t)+alfa*cosfi*sinh(t)+xcon;
   coory:=beta*cosfi*cosh(t)+alfa*sinfi*sinh(t)+ycon
  end;

procedure iperpos1;
  begin
   coorx:=beta*sinfi*cosh(t)+alfa*cosfi*sinh(t)+xcon;
   coory:=-beta*cosfi*cosh(t)+alfa*sinfi*sinh(t)+ycon
  end;


procedure iperneg;
  begin
   coorx:=alfa*cosfi*cosh(t)-beta*sinfi*sinh(t)+xcon;
   coory:=alfa*sinfi*cosh(t)+beta*cosfi*sinh(t)+ycon
  end;


procedure iperneg1;
begin
  coorx:=-alfa*cosfi*cosh(t)-beta*sinfi*sinh(t)+xcon;
  coory:=-alfa*sinfi*cosh(t)+beta*cosfi*sinh(t)+ycon
end;
```

```
procedure iperoriza;
begin
  coorx:=beta*cosh(t)+xcon;
  coory:=alfa*sinh(t)+ycon
end;

procedure iperoriza1;
begin
  coorx:=-beta*cosh(t)+xcon;
  coory:=alfa*sinh(t)+ycon
end;


procedure iperorizneg;
begin
  coorx:=beta*sinh(t)+xcon;
  coory:=alfa*cosh(t)+ycon
end;

procedure iperorizneg1;
begin
  coorx:=beta*sinh(t)+xcon;
  coory:=-cosh(t)*alfa+ycon
end;

procedure ellissegen;
begin
  alfa:=sqrt(abs(deta/(mi1*deta1)));
  beta:=sqrt(abs(deta/(mi2*deta1)));
  coorx:=alfa*cosfi*cos(t)-beta*sinfi*sin(t)+xcon;
  coory:=alfa*sinfi*cos(t)+beta*cosfi*sin(t)+ycon
end;

procedure ellisseori;
begin
  coorx:=sqrt(abs(f/a))*cos(t)+xcon;
  coory:=sqrt(abs(f/b))*sin(t)+ycon
end;

procedure assepar;
begin
  coorx:=cosalfa*t;
  coory:=sinalfa*t-(2*b*e+c*d)/(4*sqr(b)+sqr(c))
end;

procedure assev;
  begin
  coorx:=-d/(2*a);
  coory:=t
end;

procedure parabola1;
begin
coorx:=cosalfa*abs(mi1+mi2)/2*sqrt(-
(mi1+mi2)/deta)*sqr(t)-sinalfa*t+xv;
coory:=sinalfa*abs(mi1+mi2)/2*sqrt(-
(mi1+mi2)/deta)*sqr(t)+cosalfa*t+yv
end;

procedure parabola2;
begin
coorx:=-cosalfa*abs(mi1+mi2)/2*sqrt(-
(mi1+mi2)/deta)*sqr(t)-sinalfa*t+xv;
coory:=-sinalfa*abs(mi1+mi2)/2*sqrt(-
(mi1+mi2)/deta)*sqr(t)+cosalfa*t+yv
end;

procedure paravert;
begin
  coorx:=t;
  coory:=-(a*sqr(t)+d*t+f)/e
end;

Function x1(var a: real): real;
begin
  x1:= xc + a
end;

Function y1(var a: real): real;
begin
  y1:= yc - a
end;

procedure segver;
begin
  line(i,(yc-2),i,(yc+2));
  line(j,(yc-2),j,(yc+2))
end;

procedure segor;
begin
  line((xc-2),i,(xc+2),i);
  line((xc-2),j,(xc+2),j)
end;

procedure assi;
begin
  line(xc, 0, xc, maxy);
  line(0, yc, maxx, yc);
  i:=xc;
  j:=i;
  while(i<maxx)or(j>0) do
   begin
    i:=i+pass;
    j:=j-pass;
    segver
   end;
  i:=yc;
  j:=i;
  while(i<maxy)or(j>0) do
   begin
    i:=i+pass;
    j:=j-pass;
    segor
   end;
end;

procedure assx(var pis:longint; pas:integer;
coor:real);
var app: real;
begin
  app:=pas*coor;
  app:=x1(app);
  pis:=round(app)
end;

procedure assy(var pis:longint; pas:integer;
coor:real);
var app: real;
begin
  app:=pas*coor;
  app:=y1(app);
  pis:=round(app)
end;

procedure tracciaipero;
begin
  t:=-25;
  repeat
  asseor1;
  assx(xa,pass,coorx);
  assy(ya,pass,coory);
  asseor2;
  assx(xb,pass,coorx);
  assy(yb,pass,coory);
  asintori1;
  assx(xe,pass,coorx);
  assy(ye,pass,coory);
  asintori;
  assx(xd,pass,coorx);
  assy(yd,pass,coory);
  t:=t +0.007;
  asseor1;
  assx(xa1,pass,coorx);
  assy(ya1,pass,coory);
  asseor2;
  assx(xb1,pass,coorx);
  assy(yb1,pass,coory);
  asintori1;
  assx(xe1,pass,coorx);
  assy(ye1,pass,coory);
  asintori;
  assx(xd1,pass,coorx);
  assy(yd1,pass,coory);
  line(xa,ya,xa1,ya1);
  line(xb,yb,xb1,yb1);
  line(xe,ye,xe1,ye1);
  line(xd,yd,xd1,yd1);
  t:=t+0.007;
 until (t>=25);
 if ((mi1*deta/deta1)>0) then
  begin

   t:=-3.14;

     repeat
     iperoriza;
     assx(x,pass,coorx);
     assy(y,pass,coory);
     iperoriza1;
     assx(xa,pass,coorx);
     assy(ya,pass,coory);
      t:=t+0.007;
      iperoriza;
     assx(x2,pass,coorx);
     assy(y2,pass,coory);
     iperoriza1;
     assx(xa1,pass,coorx);
     assy(ya1,pass,coory);
     line(xa,ya,xa1,ya1);
     line(x,y,x2,y2);
     t:=t+0.007;
     until (t>=3.14 )
   end
```



```
        else
   begin
    t:=-3.14;
    repeat
     iperorizneg;
     assx(x,pass,coorx);
     assy(y,pass,coory);
     iperorizneg1;
     assx(xa,pass,coorx);
     assy(ya,pass,coory);
     t:=t+0.007;
     iperorizneg;
     assx(x2,pass,coorx);
     assy(y2,pass,coory);
     iperorizneg1;
     assx(xa1,pass,coorx);
     assy(ya1,pass,coory);
     line(xa,ya,xa1,ya1);
     line(x,y,x2,y2);
      t:=t+0.007;
    until (t>=3.14 )
   end;
  readln
end;

procedure ipergen;
begin
  t:=-25;
  repeat
  assegen1;
  assx(xa,pass,coorx);
  assy(ya,pass,coory);
  assegen2;
  assx(xb,pass,coorx);
  assy(yb,pass,coory);
  asintotogen1;
  assx(xe,pass,coorx);
  assy(ye,pass,coory);
  asintotogen2;
  assx(xd,pass,coorx);
  assy(yd,pass,coory);
  t:=t +0.007;
  assegen1;
  assx(xa1,pass,coorx);
  assy(ya1,pass,coory);
  assegen2;
  assx(xb1,pass,coorx);
  assy(yb1,pass,coory);
  asintotogen1;
  assx(xe1,pass,coorx);
  assy(ye1,pass,coory);
  asintotogen2;
  assx(xd1,pass,coorx);
  assy(yd1,pass,coory);
  line(xa,ya,xa1,ya1);
  line(xb,yb,xb1,yb1);
  line(xe,ye,xe1,ye1);
  line(xd,yd,xd1,yd1);
  t:=t+0.007;
 until (t>=25 );
 if ((mi1*deta/deta1)>0) then
  begin
    t:=-3.14;
    repeat
     iperpos;
     assx(x,pass,coorx);
     assy(y,pass,coory);
     iperpos1;
     assx(xa,pass,coorx);
     assy(ya,pass,coory);
     t:=t+0.007;
     iperpos;
     assx(x2,pass,coorx);
     assy(y2,pass,coory);
     iperpos1;
     assx(xa1,pass,coorx);
     assy(ya1,pass,coory);
     line(xa,ya,xa1,ya1);
     line(x,y,x2,y2);
     t:=t+0.007;
    until (t>=3.14);
   end
        else
   begin
    t:=-3.14 ;
    repeat
     iperneg;
     assx(x,pass,coorx);
     assy(y,pass,coory);
     iperneg1;
     assx(xa,pass,coorx);
     assy(ya,pass,coory);
     t:=t+0.007;
     iperneg;
     assx(x2,pass,coorx);
     assy(y2,pass,coory);
     iperneg1;
     assx(xa1,pass,coorx);
     assy(ya1,pass,coory);
     line(xa,ya,xa1,ya1);
     line(x,y,x2,y2);
     t:=t+0.007;

    until (t>=3.14)
      end;
    readln;
   end;

procedure tracciaellisseor;
 begin
  t:=-25;
  repeat
   asseor1;
   assx(xa,pass,coorx);
   assy(ya,pass,coory);
   asseor2;
   assx(xb,pass,coorx);
   assy(yb,pass,coory);
   t:=t +0.007;
   asseor1;
   assx(xa1,pass,coorx);
   assy(ya1,pass,coory);
   asseor2;
   assx(xb1,pass,coorx);
   assy(yb1,pass,coory);
   line(xa,ya,xa1,ya1);
   line(xb,yb,xb1,yb1);
   t:=t+0.007;
  until (t>=25 );
  t:=-3.14;
  repeat
   ellisseori;
   assx(xe,pass,coorx);
   assy(ye,pass,coory);
   t:=t +0.007;
   ellisseori;
   assx(xe1,pass,coorx);
   assy(ye1,pass,coory);
   line(xe,ye,xe1,ye1);
   t:=t+0.007;
  until (t>=3.14 );
  readln
 end;

procedure tracciaellisse;
 begin
  t:=-25;
  repeat
   assegen1;
   assx(xa,pass,coorx);
   assy(ya,pass,coory);
   assegen2;
   assx(xb,pass,coorx);
   assy(yb,pass,coory);
   t:=t +0.007;
   assegen1;
   assx(xa1,pass,coorx);
   assy(ya1,pass,coory);
   assegen2;
   assx(xb1,pass,coorx);
   assy(yb1,pass,coory);
   line(xa,ya,xa1,ya1);
   line(xb,yb,xb1,yb1);
   t:=t+0.007;
  until (t>=25 );
  t:=-3.14;

  repeat
   ellissegen;
   assx(xe,pass,coorx);
   assy(ye,pass,coory);
   t:=t +0.007;
   ellissegen;
   assx(xe1,pass,coorx);
   assy(ye1,pass,coory);
   line(xe,ye,xe1,ye1);
   t:=t+0.007;
  until (t>=3.14 );
  readln
end;


procedure tracciaparabor;
begin
  t:=-25;
  repeat
   assev;
   assx(xa,pass,coorx);
   assy(ya,pass,coory);
   paravert;
   assx(xe,pass,coorx);
   assy(ye,pass,coory);
   t:=t +0.007;
   assev;
   assx(xa1,pass,coorx);
   assy(ya1,pass,coory);
   paravert;
   assx(xe1,pass,coorx);
  assy(ye1,pass,coory);
   line(xa,ya,xa1,ya1);
   line(xe,ye,xe1,ye1);
   t:=t+0.007;
   until (t>=25 );
   readln
end;

procedure tracciaparabola;
begin
  if (delta>0) then
  begin
   t:=-10;
  repeat
   assepar;
   assx(xa,pass,coorx);
   assy(ya,pass,coory);
   parabola1;
   assx(xe,pass,coorx);
   assy(ye,pass,coory);
   t:=t +0.01;
   assepar;
   assx(xa1,pass,coorx);
   assy(ya1,pass,coory);
   parabola1;
   assx(xe1,pass,coorx);
   assy(ye1,pass,coory);
   line(xa,ya,xa1,ya1);
   line(xe,ye,xe1,ye1);
   t:=t+0.01;

  until (t>=10 );
 readln
 end
   else
  begin
   t:=-10;
  repeat
   assepar;
   assx(xa,pass,coorx);
   assy(ya,pass,coory);
   parabola2;
   assx(xe,pass,coorx);
   assy(ye,pass,coory);
   t:=t +0.01;
   assepar;
   assx(xa1,pass,coorx);
   assy(ya1,pass,coory);
   parabola2;
   assx(xe1,pass,coorx);
   assy(ye1,pass,coory);
   line(xa,ya,xa1,ya1);
   line(xe,ye,xe1,ye1);
   t:=t+0.01;
  until (t>=10 );
 readln
 end
end;
```

```
procedure iperbole;
begin
  if (c=0) then tracciaipero
      else
    ipergen
end;

procedure ellisse;
begin
  if ((a+b*deta)>0) then
    begin
      closegraph;
      clrscr;
    writeln('WARRRNING!!!! ELLISSE A PUNTI
COMPLESSI');
      delay(3000)
    end
        else
    begin
      if (c=0) then tracciaellisseor
        else
      tracciaellisse
    end;
 end;

procedure parabola;
begin
  if (b=0)and(c=0) then tracciaparabor
        else
         begin
          mi1:=sqrt(sqr(a)+2*a*b+sqr(b) -
4*deta1)/2+a/2+b/2;
          mi2:=-sqrt(sqr(a)+2*a*b+sqr(b) -
4*deta1)/2+a/2+b/2;
val:=-(16*sqr(b)*sqr(b)*f-
4*sqr(b)*b*sqr(e)+8*sqr(b)*sqr(c)*f);
val:=val-(b*sqr(c)*(sqr(d)-2*sqr(e))+sqr(c)*c*(c*f-
d*e));
          val:=val/(sqr(4*sqr(b)+sqr(c))*(2*b*d-
c*e));
          xv:=2*b*val;
          yv:=-c*val-(2*b*e+c*d)/(4*sqr(b)+sqr(c));
          ca:=-c/(2*b);
          cosalfa:=1/sqrt(sqr(ca) +1);
          sinalfa:=(ca)/sqrt(sqr(ca) +1);
delta:=-4*a*b*sqr(c)*(16*sqr(b)*sqr(b)*sqr(xv+1)-
16*sqr(b)*b*c*yv*(xv+1));
delta:=delta-
4*a*b*sqr(c)*(4*sqr(b)*c*(c*(2*xv+sqr(yv)+2)-
2*e*(xv+1)));
delta:=delta-4*a*b*sqr(c)*(-4*b*sqr(c)*(c*yv-
(e*yv+f))+sqr(c)*c*(c-2*e));
   delta:=delta-
64*sqr(b)*sqr(b)*b*sqr(c)*(d*(xv+1)+f);
delta:=delta+16*sqr(b)*sqr(b)*sqr(c)*(sqr(c)*(sqr(xv
)+2*xv+1));
delta:=delta+16*sqr(b)*sqr(b)*sqr(c)*(2*c*(d*yv+e*
(xv+1))+sqr(e));
delta:=delta-
16*sqr(b)*b*sqr(c)*c*(sqr(c)*yv*(xv+1)+c*(d*(xv+
2)+e*yv+2*f)-d*e);
delta:=delta+4*sqr(b)*sqr(c)*sqr(c)*(sqr(c)*(2*xv+s
qr(yv)+2)+2*c*(d*yv+e)+sqr(d));
          delta:=delta- 4*b*sqr(c)*sqr(c)*sqr(c)*(c*yv+d);
          delta:=delta+sqr(c)*sqr(c)*sqr(c)*sqr(c);
          tracciaparabola
         end;
end;

procedure traccia;
 begin
  dati_coniche;
  if (deta=0) then
    begin
     closegraph;
     clrscr;
     writeln('WWWARNING!!!! CONICA
RIDUCIBILE..NON LA DISEGNAMO');
    delay(3000)
   end
      else
  begin
   if (deta1<0) then iperbole
      else
       if (deta1=0) then parabola
         else
         ellisse
  end
end;

procedure disegno;

 begin
InitGraph(Gd,Gm,'percorso per bgi di grafica');
ASSI;
traccia;
closegraph;
if deta<>0 then
 begin
  repeat
    writeln('  INGRANDISCI   -I');writeln;
    writeln('  RIMPICCIOLISCI -R');writeln;
    writeln('  CENTRA        -C');writeln;
    writeln('  FINE          -F');writeln;writeln;
    write('  SCEGLI IL COMANDO =
');readln(risp);
    case risp of
     'I','i': begin
              pass:=pass*2;
              disegno
             end;
     'R','r': begin
              pass:=round(pass/2);
              if (pass>0) then disegno
              end;
     'C','c': begin
              write('Ascissa del punto da centrare -');
               readln(xc);
              write('Ordinata del punto da centrare -');
               readln(yc);
              xc:=-xc*pass+maxx div 2;
              yc:=maxy div 2 +yc*pass;
              disegno
              end
    end
   until (risp='F')or(risp='f');
  end;
end;
```



```
procedure in_dati;
  begin
    clrscr;
    write('Coeff. di x^2:'); readln(a);
    write('Coeff. di y^2:'); readln(b);
    write('Coeff. di xy:'); readln(c);
    write('Coeff. di x:'); readln(d);
    write('Coeff. di y:'); readln(e);
    write('Termine noto:'); readln(f)
  end;

  BEGIN
   in_dati;
   pass:=40;
   xc:=maxx div 2;
   yc:=maxy div 2;
   Gd:= detect;
   disegno;
  END.
```

Sfruttando le precedenti identità l'equazione della parabola diventa:

$$\mathrm{tr}(N')y'^2 \pm 2\sqrt{-\frac{\det(M')}{\mathrm{tr}(N')}}\,x' = 0$$

che per le considerazioni fatte in merito agli invarianti metrici si può scrivere nella forma seguente:

$$\mathrm{tr}(N)y'^2 \pm 2\sqrt{-\frac{\det(M)}{\mathrm{tr}(N)}}\,x' = 0.$$

Si può ottenere:

$$|\mathrm{tr}(N)|\,y'^2 - 2\sqrt{-\frac{\det(M)}{\mathrm{tr}(N)}}\,x' = 0.$$

Ricavare l'equazione della conica a questo punto è immediato e la sua rappresentazione parametrica è:

$$PARABOLA = \left[\frac{|\mathrm{tr}(N)|}{2}\sqrt{-\frac{\mathrm{tr}(N)}{\det(M)}}\,t^2, t\right] \qquad (2)$$

Nel caso in cui l'asse della parabola sia parallelo all'asse y ($c=b=0$) la curva è espressa in forma cartesiana esplicita e la sua rappresentazione parametrica diventa:

$$PARAVER = \left[t, -\frac{at^2+dt+f}{e}\right].$$

I parametri direttori l, m dell'asse della parabola sono messi in evidenza dai termini di secondo grado dell'equazione cartesiana implicita assegnata e sono dati dalla seguente equazione:

$$al^2+blm+cm^2 = 0.$$

Ponendo $l = 1$ e risolvendo l'equazione rispetto a m si ottiene:

$$m = \frac{-c \pm \sqrt{c^2-4ab}}{2b};$$

notando che $c^2-4ab = 4\det(N) = 0$ si ha:

$$m = \mathbf{ca} = -c/(2b).$$

Quindi il punto improprio della parabola ha coordinate $(2b,-c,0)$. Sia D_∞ la direzione perpendicolare alla direzione dell'asse; quindi $D_\infty = (c,2b,0)$.
L'asse della parabola è la polare di D_∞ ed ha quindi equazione $cf_x + 2bf_y = 0$ dove $f(x,y)$ rappresenta il polinomio di secondo grado in due variabili che determina l'equazione polinomiale della parabola. La soluzione dell'ultima equazione citata fornisce la seguente equazione cartesiana esplicitata rispetto alla variabile y:

$$y = -\frac{2c(a+b)x + 2be + cd}{4b^2+c^2}$$

e ponendo $c^2 = 4ab$ si ottiene:

$$y = -\frac{c}{2b}x - \frac{2be+cd}{4b(a+b)}.$$

Osservazione. Se $b = c = 0$ l'asse non può essere ricavato con il metodo precedente. La parabola ha comunque asse parallelo all'asse y, quindi l'equazione dell'asse è:

$$x = -\frac{d}{2a}.$$

Le coordinate del vertice si ricavano calcolando l'intersezione tra l'asse e la conica. Poniamo:

$$\cos\tau = \frac{1}{\sqrt{1+\mathbf{ca}}},\ \mathrm{sen}\,\tau = \frac{\mathbf{ca}}{\sqrt{1+\mathbf{ca}^2}}.$$

L'equazione dell'asse x' quindi è:

$$[\cos\tau t + x_v;\ \mathrm{sen}\,\tau t + y_v].$$

L'equazione dell'asse y' quindi è:

$$[-\mathrm{sen}\,\tau t + x_v;\ \cos\tau t + y_v].$$

La matrice di trasformazione della conica risulta allora:

$$C = \begin{pmatrix} \cos\tau & -\mathrm{sen}\,\tau & x_v \\ \mathrm{sen}\,\tau & \cos\tau & y_v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo il punto P di coordinate $(x_v + 1,\ y_v + \mathbf{ca})$, P ovviamente appartiene all'asse x'.

Consideriamo quindi la retta ortogonale all'asse x' e passante per P; essa avrà equazione:

$$y = -\frac{1}{\mathbf{ca}}x + \frac{\mathbf{ca}y_v+\mathbf{ca}^2+x_v+1}{\mathbf{ca}}.$$

Siano P_1 e P_2 i punti ottenuti dall'intersezione di suddetta retta con la parabola; distinguiamo due casi:

1) P_1 e P_2 sono a coordinate reali, ne segue che la matrice di trasformazione di coordinate determina la parabola nella forma (2);

2) i punti sono a coordinate complesse, ne segue che la parabola sarà di equazioni parametriche:

$$PARABOLA = \left[-\frac{|\mathrm{tr}(N)|}{2}\sqrt{-\frac{\mathrm{tr}(N)}{\det(M)}}\,t^2, t\right].$$

Il programma

Il testo del listato (in Pascal, versione 4.0 e seguenti) non ha la pretesa di essere «un'opera» e tanto meno «compiuta»; si accettano suggerimenti e modifiche, soprattutto da parte degli studenti.
L'indirizzo di posta elettronica a cui fare riferimento per richiedere il listato del programma è il seguente: *nlcal@tin.it*.

Marco Calvani
Liceo Scientifico «P. Paschini»
Gemona (UD)

[1] Ade Capone, *Lazarus Ledd*, ed. Star Comics, n. 61, 1998.
[2] «Il Betti possedeva ciò che al Brioschi mancava e questi aveva quanto faceva difetto al Betti... Per sua indole fine ed artistica al Betti era più grato pensare che non lavorare in maniera automatica o meccanica e perciò quei lunghi calcoli che formavano la delizia del rude lombardo erano a lui insopportabili; anzi qualora egli si fosse messo ad eseguirli avrebbe forse corso il rischio di commettere degli errori, se non lo avesse soccorso quel suo finissimo intuito matematico che non lo abbandonava mai...». Vito Volterra, *Saggi Scientifici*, Zanichelli, Bologna 1990.
[3] Nel caso dell'ellisse si verifica se è o meno a punti complessi.
[4] Ci si è basati sul testo *Geometria* di G. Accascina-V. Villani, Materiali Didattici, 28 ETS, Pisa 1983.