La misura della costante di Planck con il laboratorio di fisica *Open*

Introduzione

In queste pagine viene descritto un esperimento noto sulla costante di Planck.
Prima di esporre l'esperimento è necessario spiegare quali sono le basi teoriche e gli sviluppi tecnologici che ci permettono di sperimentare la fisica quantistica.

Il quanto ed i livelli orbitali di energia

Marx Karl Ernst Ludwig Planck (1858 – 1947), scienziato tedesco, è considerato l'iniziatore della Fisica Quantistica. Con i sui studi sulle radiazioni elettromagnetiche arriva alla conclusione che l'energia di radiazione elettromagnetica, qualunque essa sia, è sempre multiplo intero di una grandezza fondamentale. In pratica non possiamo far crescere l'energia di un'onda elettromagnetica in maniera continua, ma, in ogni caso, effettueremo dei salti. Per esempio prendiamo, un'onda FM (modulazione di frequenza, quella delle radio) tipo radio Subasio per capirci.

A Terni radio Subasio trasmette a 95.9 MHz, che è la frequenza ν, sappiamo che la luce viaggia alla velocità, *c*, di 299792458 m/s, quindi non è difficile dedurre la lunghezza d'onda, λ, del segnale radio che è $\lambda=\frac{c}{\nu}=\frac{299792458}{95.9\cdot 10^6}=3.126$m dato che $c=\lambda\cdot\nu$.

L'energia dell'onda non può passare se non attraverso multipli interi del *quanto* di energia fondamentale, che è

$$E=h\cdot\nu=h\cdot\frac{c}{\lambda}=6.62606896\cdot 10^{-34}\cdot 95.9\cdot 10^6=6.354\cdot 10^{-26}\ \mathrm{J}$$

h è una costante, detta, appunto, la costante di Planck, l'onda che possiede il quanto di energia viene detto fotone.

Attenzione! Per quanto possa apparire piccolo, questo numero non è zero!

Man mano che la lunghezza d'onda si fa più piccola il quanto di energia si fa sempre più grande e l'effetto quantistico pure.

Un raggio cosmico o gamma può avere una frequenza dell'ordine di 200 Ehz allora il suo quanto misura $E=h\cdot\nu=h\cdot\frac{c}{\lambda}=6.62606896\cdot 10^{-34}\cdot 200\cdot 10^{18}=1.25\cdot 10^{-5}\mathrm{J}$ (*formula n.1)*.

Supponiamo di avere un raggio di luce rossa, la sua energia sarà un multiplo intero dell'energia del fotone rosso, se vogliamo aumentare l'intensità di energia del raggio, senza variarne la frequenza (un raggio di luce rossa sempre più intenso), ciò comporta che avremo un'energia, sempre multipla del fotone rosso ma maggiore.

Dal punto di vista quantistico l'aumento dell'energia della luce rossa corrisponde all'aumento del numero dei fotoni, che viaggiano con quella determinata energia.

Potremo aumentare l'intensità di un'onda della luce anche cambiandone la frequenza, ciò comporterebbe una variazione nel pacchetto di base, l'energia del fotone.

Il fotone della luce di colore rosso, ha un’energia inferiore al fotone della luce del colore verde, ciò lo deduciamo alla luce della *formula n.1*, dato che sappiamo che la frequenza dell’uno è minore di quella dell’altro.

Inutile dire che questa scoperta ha sconvolto il mondo scientifico, in un periodo in cui si pensava che tutte le scoperte della Fisica, dopo le equazioni di Maxwell, fossero state raggiunte e si prospettava che tutta la fisica potesse essere racchiusa in un manuale.

La realtà era perfettamente definita e rappresentata.

Successivamente il danese Niels Henrik David Bohr (1885 – 1962) , con la sua scuola che ospitava i migliori scienziati di tutto il mondo, teorizza il modello atomico omonimo, che si studia delle scuole medie.

Nel modello di Bhor (quantizzazione del raggio delle orbite elettroniche) gli elettroni orbitano attorno al nucleo, secondo orbite quantizzate (cioè per passare da un’orbita ad un’altra l’elettrone deve emettere o assorbire un determinato fotone, sì proprio quello di Planck). Bhor inaugura una nuova era per la fisica, si tratta della QED, per ora, cioè l’elettrodinamica quantistica.

Non tutti i fisici sono d’accordo con le nuove teorie basate sulla statistica, in particolare Albert Einstein, che diverse volte è stato a trovare Bhor a Copenaghen e con il quale mantiene sempre un ottimo rapporto, è fortemente contrario, nonostante abbia preso il Nobel per l’effetto fotoelettrico, che conferma le ipotesi di Planck (energia quantizzata) e di Bhor (livelli orbitali)

Conduttori metallici, semiconduttori e diodi led

Un conduttore metallico, tipo rame o tungsteno (quello delle lampadine a filamento), è caratterizzato dal legame metallico.

Gli elettroni della banda orbitale più esterna degli atomi del metallo vengono messi in comune nel reticolo cristallino e vanno a formare il caratteristico *mare di Fermi*, un mare di elettroni che si muove liberamente all’interno del reticolo cristallino fatto di ioni del metallo.

Quando agli estremi del metallo viene applicata una differenza di potenziale, *ddp*, ad esempio con una pila, gli elettroni si mettono in movimento ordinato nel verso opposto al campo generato dalla *ddp*, per compensare la differenza di potenziale.

Si genera un moto ordinato di elettroni, *i*, che si misura con il rapporto tra la carica, equivalente positiva, che passa attraverso la sezione del conduttore ed il tempo in cui questa carica transita.

La corrente segue la I legge di Ohm, cioè, ad una determinata temperatura, la corrente è direttamente proporzionale alla differenza di potenziale, $\Delta V = R \cdot i$, la costante di proporzionalità R si chiama resistenza, ma questo lo sapete già della seconda media.

Se in un piano cartesiano assegniamo alle ascisse la differenza di potenziale ai capi del conduttore e alle ordinate la corrente rispettiva, si ha come grafico della legge una retta per l’origine.

In un semiconduttore invece la conduzione non è scontata. Nel silicio o germanio, ad una certa temperatura, alcuni elettroni di legame, a causa dell’agitazione termica, hanno un’energia sufficiente per ‘liberarsi’ e diventare elettroni di conduzione, generando nell’atomo che ha ceduto l’elettrone, una lacuna, uno ione, che attira a sua volta elettroni dagli atomi vicini.

Se si applica la differenza di potenziale agli estremi di un semiconduttore, ad una certa temperatura, si registra un passaggio di cariche elettriche negative (gli elettroni di conduzione) ed un passaggio di cariche elettriche positive (le lacune).

Anche in questo caso la corrente è misurabile con un buon amperometro, ed in generale si osserva che, a parità di differenza di potenziale e di sezione e lunghezza del semiconduttore e conduttore, la corrente del semiconduttore è molto più debole.

Ciò è dovuto al fatto che le cariche in movimento nel semiconduttore sono molte di meno. Inoltre si osserva che all'aumentare della temperatura la conducibilità aumenta nel semiconduttore, contrariamente al conduttore metallico. Si osserva, inoltre, che, e poi lo verificheremo in generale, il semiconduttore non segue la I legge di Ohm.

Un diodo led è un semiconduttore drogato, nel semiconduttore sono aggiunte delle *impurezze,* come per esempio , l'arsenico (As) o il Boro (B) che aumentano gli elettroni di conduzione o aumentano le lacune. Il semiconduttore così costruito (tipo *n,p)*, permette il passaggio della corrente in un solo verso e, da una certa tensione in poi, produce direttamente energia luminosa da energia elettrica.

La conduzione elettrica avviene quando si raggiunge una tensione d'innesco. La legge che regola il passaggio di corrente in un diodo led non è la legge di Ohm ed ogni diodo led avrà una sua curva caratteristica che rappresenta la relazione tra ddp e corrente.

I diodi led nello spettro del visibile vengono commercializzati intorno agli anni 1970 e sono , rossi, verdi e gialli, o una combinazione di questi tre colori.

Nel 1993 viene prodotto il primo led blu ad alta luminescenza e nel 2014, Shuji Nakamura, Hiroshi Amano e Isamu Akasaki, ricevono il premio Nobel per la fisica per aver inventato degli efficienti diodi led emettitori di luce blu.

Perché è tanto importante questa scoperta?

Perché ciò consente la creazione in scala industriale dei led di qualsiasi colore, dato che i colori primari della luce emessa sono il rosso, il verde ed il blu. La caratteristica rivoluzionaria delle lampade a led sta nel fatto che hanno un'efficienza energetica dieci volte superiore alle normali lampade a fluorescenza.

Quando il diodo-le emette energia luminosa i quanti di energia elettrica che la generano saranno uguali ai quanti di energia luminosa.

Un elettrone che passa di banda produce un fotone con quella determinata frequenza luminosa, aumentare la tensione non fa altro che aumentare il numero degli elettroni che passano di banda nello stesso modo.

Il led, all'aumentare della tensione, non cambia colore ma aumenta di luminosità.

Se conoscessimo l'energia del passaggio di banda dell'elettrone e l'energia del fotone, potremmo risalire alla costante di Planck!

L'energia del fotone è data dalla *formula n.1* il quanto di energia che viene fornito all'elettrone può essere determinato dal prodotto della carica elementare (carica dell'elettrone) per la ddp (differenza di potenziale) applicata agli estremi del diodo-led.

Dato che $E = h \cdot \nu = h \cdot \frac{c}{\lambda} = e \cdot \Delta V$ di conseguenza si avrà:

$$h = \frac{e \cdot \Delta V \cdot \lambda}{c} = costante = 6.62606896 \cdot 10^{-34}\, J \cdot s \text{ formula n.2.}$$

Scopo dell’esperimento

Dedurre, dalla curva caratteristica del Led, ottenuta con il Laboratorio di Fisica *Open*, la tensione d’innesco e, dal colore della luce Led, la frequenza.

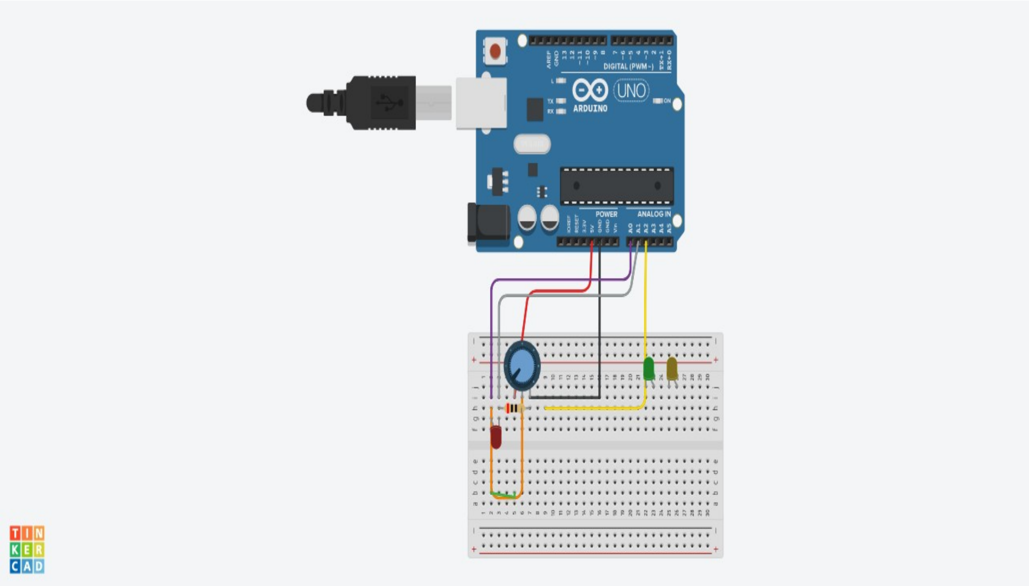
Dato il valore della carica dell’elettrone, determinare la costante di Planck sostituendo il tutto nella formula n.2.

Descrizione dell’esperimento

Per prima cosa, per misurare la frequenza della luce dei led, ho costruito uno spettroscopio.

Come potete notare non è la riproduzione fedele di quello della foto al link di seguito, ma si comporta bene! Acquistato da https://www.opitec.it/index.php?lang=4&cl=search&searchparam=spettroscopio

Quindi ho realizzato il circuito per Arduino come dalla figura seguente.



Ho utilizzato un potenziometro (uno strumento che mi permette di variare la ddp da 0 V a 5V), l'ho messo in serie con un resistore, R di circa $20\,\Omega$ e con il diodo-led.

Ho utilizzato i Pin A1 e A2 per misurare la differenza di potenziale agli estremi della resistenza R, dalla quale posso dedurre l'intensità di corrente passante attraverso il circuito, usando la I legge di Ohm ($i=\frac{\Delta V}{R}$).

Con i Pin A0 e A1 ho misurato la differenza di potenziale ai poli del diodo-led.

Ho deciso di utilizzare la libreria *Pyfirmata* per collegare direttamente Python con Arduino. Seguendo le indicazioni al link https://realpython.com/arduino-python/#reading-analog-inputs .

Ho installato la libreria per Python con il seguente comando da terminale:

sudo pip install pyfirmata

poi, dopo aver preparato Arduino, l'ho collegato al PC e dal menù dell'IDE di Arduino ho caricato lo sketch *Esempi->Firmata->StandardFirmata.ino*

Questo sketch permette di dialogare direttamente da Python con Arduino e, ad esempio, leggere i pin analogici.

Il programma per Python è il seguente:

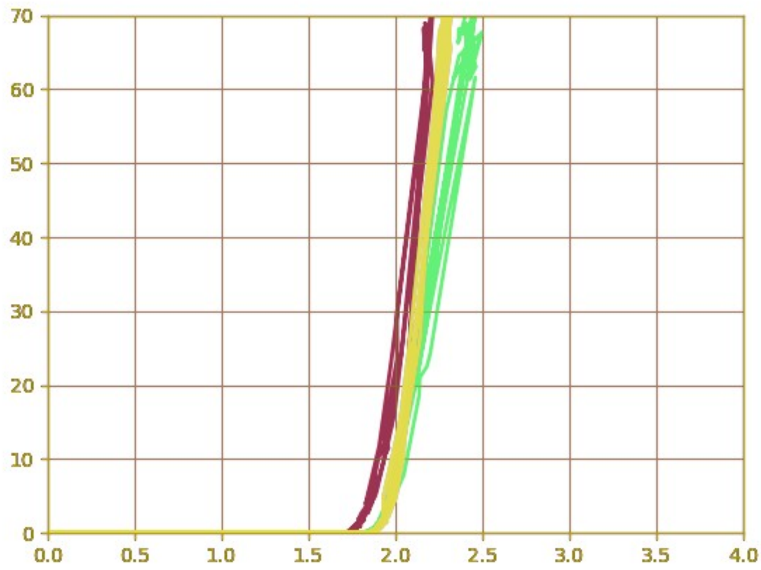
```
import pyfirmata                    # Inserimento delle varie librerie
import matplotlib
matplotlib.use("Qt5Agg")
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.animation as animation
from time import sleep
import serial
```

```
import time
board = pyfirmata.Arduino('/dev/ttyACM0')
it = pyfirmata.util.Iterator(board)
it.start()
pin0=board.get_pin('a:0:i')    #definizione delle variabili che conterranno i dati dei tre pin
pin1=board.get_pin('a:1:i')
pin2=board.get_pin('a:2:i')
fine="c"             #definizione di altre variabili
pre="0.0"
a="ciao"
while (fine != "f"):  #ciclo principale
 input("\n\n\n Premi Enter per far partire la registrazione dei dati") #inserimento  controllo
 xdata, ydata = [], []
 fig, ax = plt.subplots()     # configurazione della finestra grafica
 line, = ax.plot([], [], lw=2) # configurazione della curva da tracciare
 ax.set_ylim(0, 70)  #set degll'asse y
 ax.set_xlim(0, 4)  # set dell'asse x
 ax.grid()
 def data_gen(): #funzione di generazione dei dati
    t=0
    while (True): #continua a leggere i dati secondo lo schema impostato per 20 s
        sens0=pin0.read()  #il dato letto è un valore tra 0.0 e 1.0 che corrisponde a 0.0 V e 5.0 V
        sens1=pin1.read()
        sens2=pin2.read()
        time.sleep(0.1)       #attendi 1/10 di secondo
        dd1=abs(sens1-sens2)*5.0 # ddp di R con il dato in Volt
        dd2=abs(sens0-sens1)*5.0 # ddp del Led con il dato in Volt
        i=dd1/0.02                          #corrente nel Led in mA
        x=dd2
        y=i
        yield x, y
        t = (time.time() - start) #legge il tempo in s
        t = float(t)
 def run(data): #funzione di plot dei dati
    x,y = data
    xdata.append(x)
    ydata.append(y)
    ax.figure.canvas.draw()
    line.set_data(xdata, ydata)
    return line,
 data_gen.x = 0
 start = time.time() #tempo di inizio di registrazione dei dati
 ani = animation.FuncAnimation(fig, run, data_gen, blit=True, interval=5,repeat=False)
 plt.show()
 fine=input("Premi f per finire :")
```

Le istruzioni valgono per il SO Ubuntu 20.04, aprire il terminale nella cartella del file in python e digitare il comando:

sudo python3 grafmar_Planck.py

Di seguito potete vedere i grafici che ho ottenuto:



Si possono distinguere i tre colori? Qual è il grafico del rosso? Quello del giallo? E Quello del Verde?
Con lo spettroscopio fatto a mano ho ottenuto le seguenti lunghezze d’onda:

Colore	Lunghezza d’onda (nm)	Errore (nm)
Verde	555	5
Giallo	570	5
Rosso	630	5

L’errore precentuale è dell’1 %.

Ricavare la curva caratteristica del diodo-led

L’equazione caratteristca del diodo led è $i=i_s\left(e^{\frac{q\Delta V}{\eta k_b T}}-1\right)$dove q è la carica elementare, ΔVla differenza di potenziale ai capi del diodo, ηuna costante caratteristica del semiconduttore, k_B la costante di Boltzmann, T la temperatura assoluta, i_s è la corrente di saturazione inversa (con valori compresi tra 10^{-15} A e 10^{-10} A), il valore di corrente ottenuto assegnando una tensione negativa (polarizzazione *inversa*).

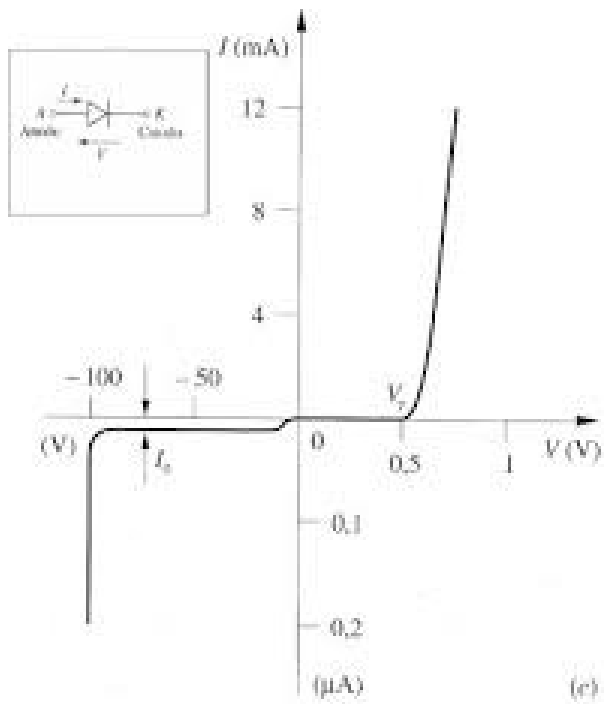


immagine presa da https://annacastelletti.blogspot.com.

Fase 1 (Dalla curva all'equazione)

Si importa il grafico ddp-corrente del singolo Led su GeoGebra e si determinano di due punti sulla curva A(x_A,y_A) e B(x_B,y_B) di cui conosceremo le coordinate.

La funzione da ottenere ha un'espressione del tipo $y=a\left(e^{bx}-1\right)$, dove *a* e *b* sono delle costanti, *x*, è la ddp ai capi del led e *y* è l'intensità di corrente. La funzione deve passare per i punti A e B, quindi, per trovare *a* e *b* basta risolvere il seguente sistema:

$\begin{cases} y_B=a\left(e^{bx_B}-1\right) \\ y_B=a\left(e^{bx_B}-1\right) \end{cases}$da cui segue $\frac{y_B}{y_A}=\frac{e^{bx_B}-1}{e^{bx_A}-1}$, se risolviamo l'equazione $\frac{e^{bx_B}-1}{e^{bx_A}-1}-\frac{y_B}{y_A}=0$nella variabile *b*, allora siamo in grado di risolvere anche il sistema poi con il metodo di sostituzione.

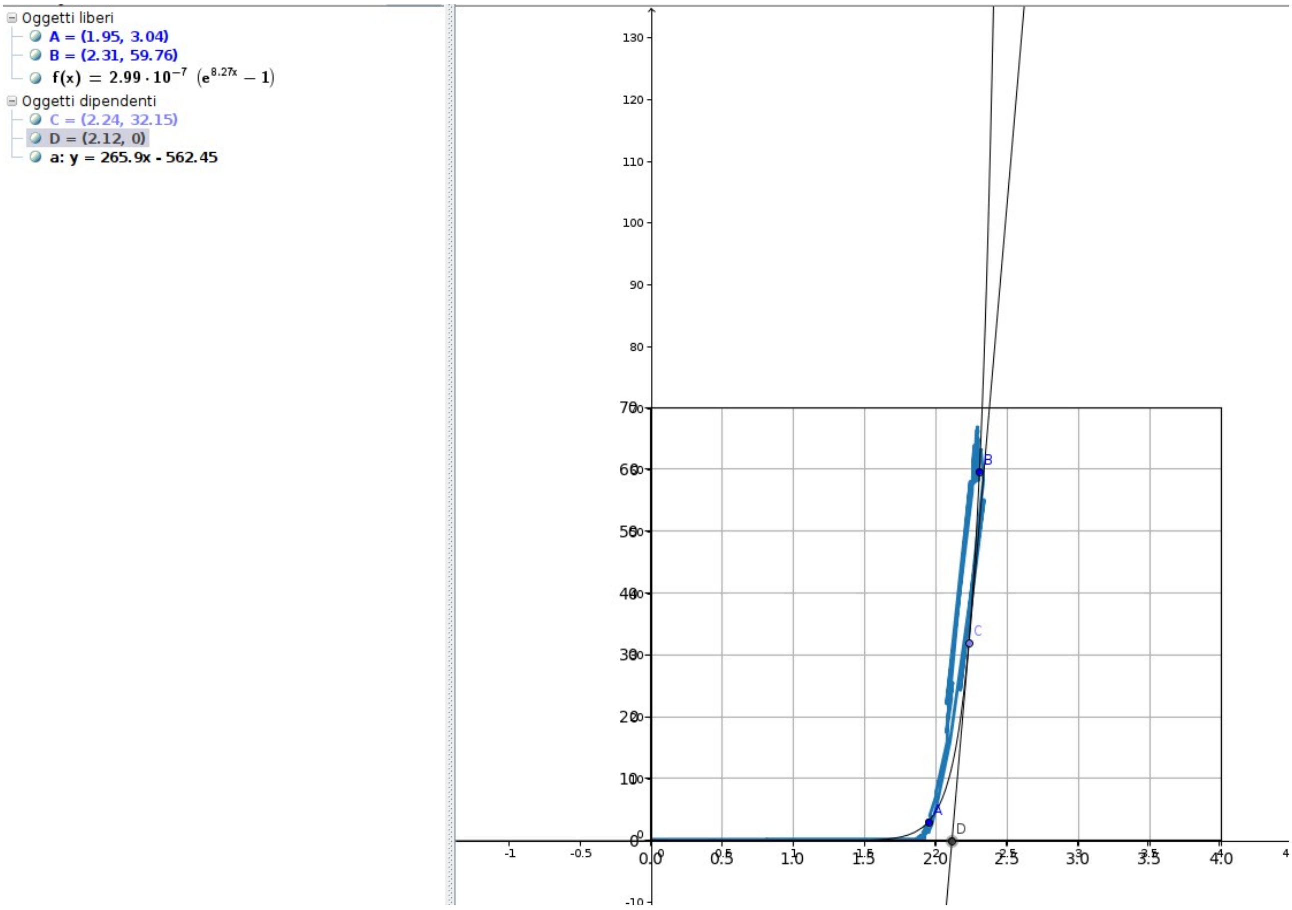
Mathematica di Wolfram non lo risolve gratis, quindi dovremo trovare altre strade..

Ma come si fa?

In questo caso ci può essere di aiuto il Teorema degli zeri di una funzione, l'algoritmo di bisezione e Python.

Vi mostro di seguito un esempio di quello che è stato fatto per il diodo-led verde.

Si parte del grafico in figura:



I punti A e B hanno coordinate rispettivamente A(1.95 V, 3.04 mA) e B(2.31 V e 59.76 mA).

Dobbiamo quindi risolvere la seguente equazione $\frac{e^{b2.31}-1}{e^{b1.95}-1}-\frac{59.76}{3.04}=0.$

Fase 2 (Dall’equazione alle soluzioni)

Possiamo implementare il programma in Python che avrà il seguente listato:

```
import math
def  f(x):
        return ((math.exp(2.31*x)-1)/(math.exp(1.95*x)-1)-59.76/3.04)  #funzione di x (b)
def  zero(a1,b1):    #funzione ricorsiva di determinazione della soluzione con algoritmo di bisezione
        eps=1.0E-9    #grado di approssimazione della soluzione 9° decimale
        while (abs(a1-b1)>eps):  #ciclo in cui gli estremi dell’intervallo a,b con f(a)*F(b)<0
                x2 = (a1+b1)/2
                z = f(x2)
                if (f(x2)*f(a1)>0):
                        a1 = x2
                else:
                        b1 = x2
        return x2
```

```
o=9.0E-3;
inf = input("Estremo inferiore:")
sup = input ("Estremo superiore:")
inf = float(inf)
sup = float(sup)
if (inf<sup)&(f(inf)*f(sup)<0): #controllo della validità delle ipotesi del teorema degli zeri
        sol=zero(inf,sup)
        print('Soluzione  = ' , sol)
        y=59.76/(math.exp(2.31*sol)-1)    # dopo aver trovato la soluzione b, si trova a sostituendo
        print('corrente  saturazione inversa=',y)
else:
        print('Il procedimento non  applicabile con questi valori, cerca di cambiarli')
```

Chiamiamo il programma *Planck.py* e, una volta aperto il terminale nella cartella del programma digitiamo il comando

python3 Planck.py

Assegnamo come estremi dell'intervallo 0.1 e 30 ed il programma ci troverà le soluzioni.
Il risultato è il seguente:

```
Estremo inferiore:0.1
Estremo superiore:20
Soluzione  =  8.27355258820753
corrente  saturazione inversa= 2.993746814220642e-07
```

Il risultato è abbastanza credibile per il fatto che la corrente di saturazione inversa ha un'ordine di grandezza di 10^{-10} (considerando il passaggio da mA ad A)e rientra nell'intervallo dell'ordine di grandezza previsto! Quando succedono queste cose sono proprio contento!

Fase 3 (dalla funzione alla tangente alla caratteristica)

Possiamo inserire in GeoGebra la seguente funzione (e questo sa un po' già di magia!):

$$i=2.99\cdot10^{-7}\cdot\left(e^{8.27x}-1\right)$$

Scegliamo un punto C interno al tratto di curva AB e e tracciamo la tangente alla curva caratteristica, l'intersezione della tangente con l'asse x ci fornirà una buona approssimazione della tensione d'innesco, tensione alla quale si può stimare l'inizio del passaggio di corrente.

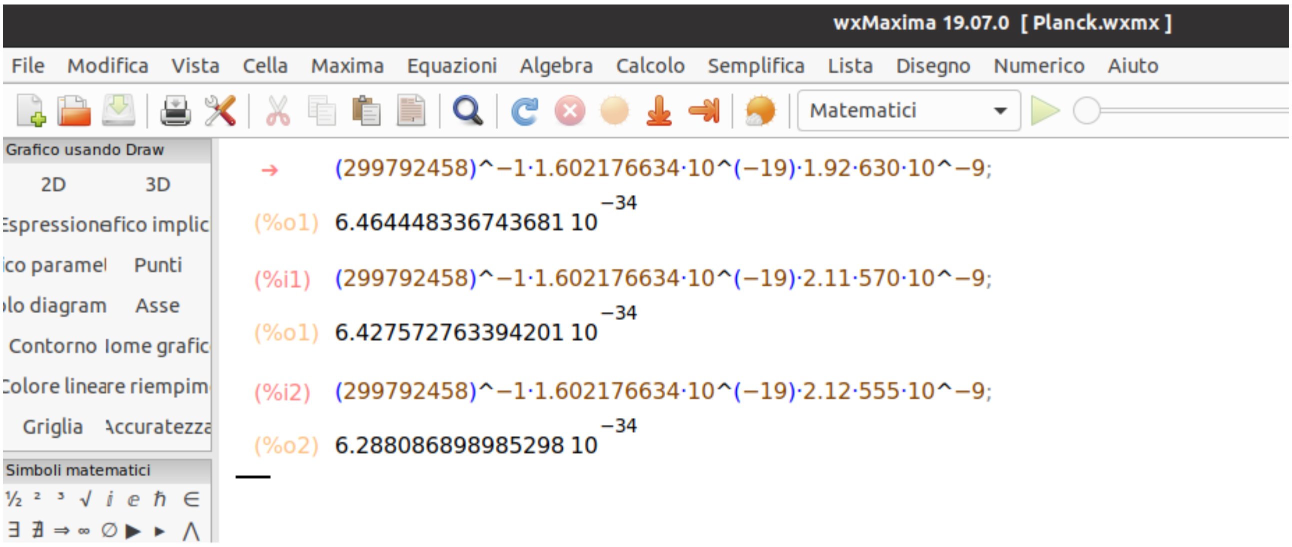
Ho ottenuto le seguenti tensioni d'innesco (per il verde potete vedere il grafico in figura):

Colore	Tensione (V)	Errore (V)
Verde	2.12	0.01
Giallo	2.11	0.01
Rosso	1.92	0.01

L'errore percentuale è dell'1%.
A questo punto possiamo sostituire i dati nella seguente formula

$h=\frac{e\cdot\Delta V\cdot\lambda}{c}$ e verificare se otteniamo una costante, ricordo che, e, è la carica dell'elettrone e che, c ,

è la velocità della luce nel vuoto (aria, va bene lo stesso).
I calcoli sono fatti con WxMaxima



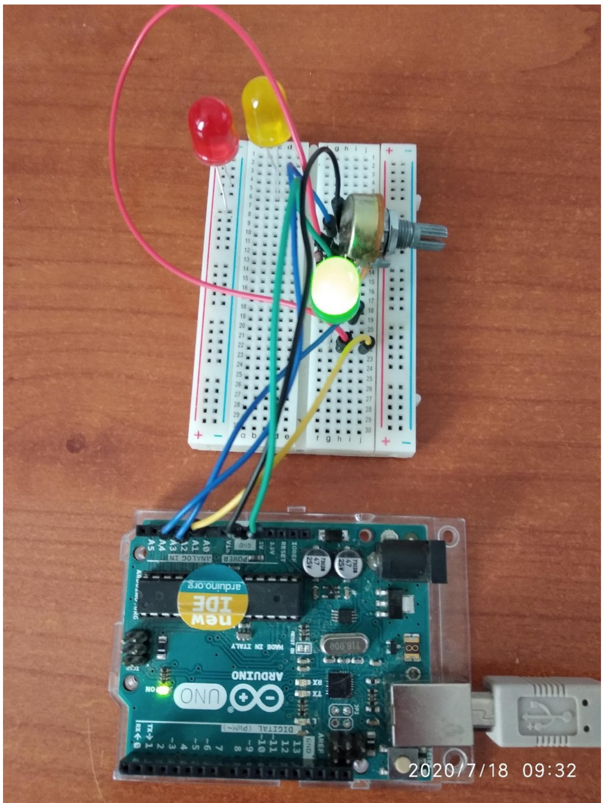
Colore	**Costante** ($10^{-34}\, j \cdot s$)	**Errore (%)**
Verde	6.46	2
Giallo	6.42	2
Rosso	6.29	2

Il valore medio della costante è $6.39 \cdot 10^{-34}\, J \cdot s$ e il valore della costante rientra nei margini dell'errore sperimentale, quindi possiamo concludere che abbiamo trovato una costante.

.

Non è interessante notare che con 15 euro abbiamo potuto verificare una proprietà della fisica atomica!
Anche solo verificare l'ordine di grandezza per me è un grande risultato!
La costante di Planck ha un valore di $h = \frac{e \cdot \Delta V \cdot \lambda}{c} = costante = 6.62606896 \cdot 10^{-34}\, J \cdot s$, che si discosta dal valore che abbiamo ottenuto del 3.6%.
Vi chiedo di indagare sull'errore: 'Si può trattare di un errore sistematico o accidentale? E quale può essere? L'esperimento può considerarsi comunque riuscito? Buon lavoro

Marco Calvani
Liceo 'Renato Donatelli'
Terni



Ugo Amaldi, *L'Amaldi per i Licei.blu*, Vol.3, Zanichelli

http://www.fmboschetto.it/lavori_studenti/lavori_fisica_studenti/misura_costante_di_Planck.pdf

https://www.instructables.com/id/I-V-Curve-With-Arduino/