MISURAZIONE DELLA COSTANTE ELASTICA E VERIFICA DELLA LEGGE DI HOOKE

Elena Ciaramellari 3AL

Introduzione:

Lo scopo di questo esperimento è quello di dimostrare la *legge di Hooke*, che definisce la forza elastica:

$$\vec{F} = -k\vec{X}$$

Analizzando il comportamento della molla a cui sono stati appesi dei cilindri metallici di massa diversa e calcolandone il suo allungamento, si è giunti a "plottare" dei grafici grazie all'elaborazione dei dati presi.

La forza elastica, come dimostrato in *Figura 1*, ci obbliga a compiere uno sforzo per allungare la molla, difatti si chiama anche *Forza di Richiamo*, ossia essa tende a ristabilire la condizione iniziale di equilibrio.

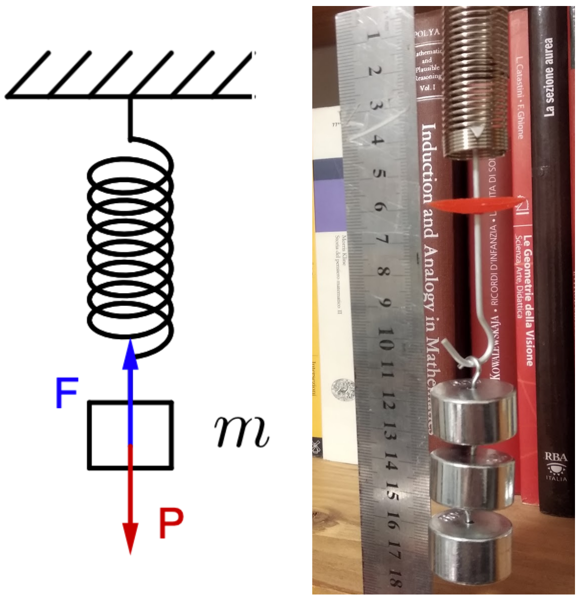

Figura 1: A sinistra una ricostruzione del sistema fisico rappresentato a destra: la forza elastica (F) è opposta alla forza esercitata dal peso (P).

Apparato sperimentale e svolgimento:

Per l'esperienza sono stati utilizzati una bilancia (di risoluzione pari a 1g), per misurare la massa dei cilindri metallici fungenti da pesi (50g, 100g, 150g, 200g); un righello graduato per la misurazione dell'allungamento (X); una molla di costante elastica K (pari a circa 25 N/m).
Per l'analisi dei dati sono stati utilizzati i software *GeoGebra* e *Root (Cern)*, un software di analisi statistica.

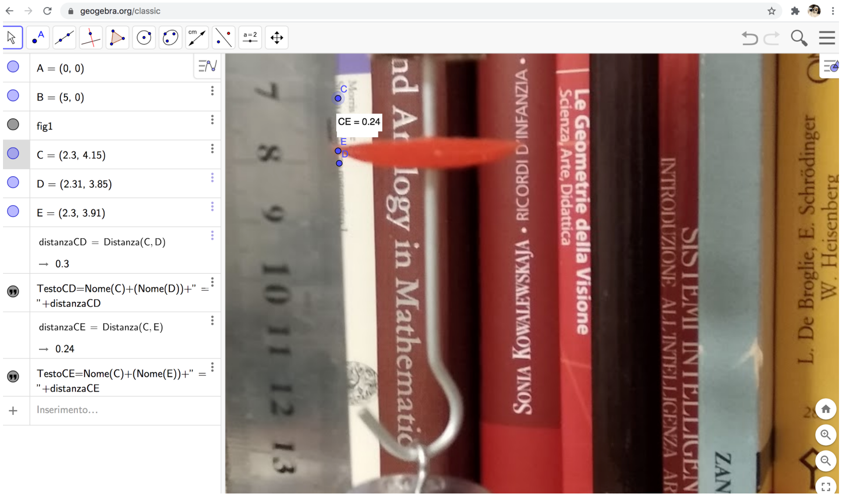

Figura 2: Illustrazione dell'acquisizione della presa delle misure. Ogni misura è stata ottenuta con l'ausilio di una proporzione tra le distanze tra i punti presi su *GeoGebra* e quelli reali.

Sono state effettuate delle misure tramite *GeoGebra*, come illustrato in *Figura 2*, utilizzando le foto scattate alla molla allungata. Per ogni allungamento sono stati presi alcuni dati (circa 5) per la valutazione dell'errore nella procedura di acquisizione. Successivamente si è scelto tra questi il dato più rappresentativo a cui si è attribuito un errore pari alla somma in quadratura della semi-dispersione e della risoluzione strumentale (1 mm).
Per ogni valore rappresentativo di allungamento si è calcolato il valore corrispondente di K e del suo errore δK (formule in appendice).
Per la prima misura, data l'assenza dei pesetti, e tenendo presente che la massa non potrebbe mai essere nulla (come del resto anche l'allungamento) si è presa in considerazione una stima di quella del gancetto, pari a (0.003 ± 0.001) Kg.
Di questi è stata fatta una media pesata con il corrispondente errore totale.
Infine si è confrontato il risultato ottenuto con quello fornito dalla "regressione lineare" fatta in automatico dal software *Root*.

Risultati e discussione:
Di seguito si forniscono le tabelle dei dati misurati con *GeoGebra* e i corrispondenti valori rappresentativi, per ognuna delle cinque misure dell'allungamento numerate da 1 a 5:

1 Misura su X (m)	2 Misura su X (m)	3 Misura su X (m)	4 Misura su X (m)	5 Misura su X (m)
0.001	0.020	0.040	0.060	0.077
0	0.023	0.039	0.058	0.077
0.001	0.020	0.040	0.059	0.076
0.001	0.020	0.041	0.059	0.077
0	0.023	0.039	0.059	0.080

Tabella 1: Dispersione dei dati sugli allungamenti.

In *Tabella 2* sono riportate le coppie rappresentative (X,P) dove con P si indica il peso, calcolato tramite la formula (errori in appendice):

$$P = mg$$

con $g = 9.806$m/s^2

	1 Misura	2 Misura	3 Misura	4 Misura	5 Misura
X(m)	0.001 ± 0.001	0.020 ± 0.002	0.040 ± 0.001	0.059 ± 0.001	0.077 ± 0.002
P(N)	0.03 ± 0.01	0.49 ± 0.01	0.98 ± 0.01	1.47 ± 0.01	1.96 ± 0.01

Tabella 2: Misure rappresentative delle coppie (allungamento X, peso P).

Si trovano, dunque, i seguenti valori degli allungamenti (calcolo degli errori in appendice) tramite la formula:

$$K = \frac{P}{X}$$

	1 Misura	2 Misura	3 Misura	4 Misura	5 Misura
K(N/m)	29 ± 31	24 ± 2	24 ± 1	24.9 ± 0.4	25.4 ± 0.7

Tabella 3: Valori della costante elastica corrispondenti alle misure rappresentative.

Dei precedenti dati è stata fatta una media pesata (vedi riferimenti bibliografici [1]), tramite la formula:

$$\overline{K} = \frac{\sum_i^5 K_i w_i}{\sum_i^5 w_i}$$

$$w_i = \frac{1}{(\delta K_i)^2}$$

dove δK_i è l'errore associato a K_i (vedi appendice).
Il risultato corrisponde a:

$$\overline{K} = (24.9 \pm 0.3)\text{N/m}$$

Per un controllo ulteriore inserendo i dati in *Root* (*Figura 3*) si ottiene il seguente risultato:

$$\overline{K_{root}} = (24.9 \pm 0.3)\text{N/m}$$

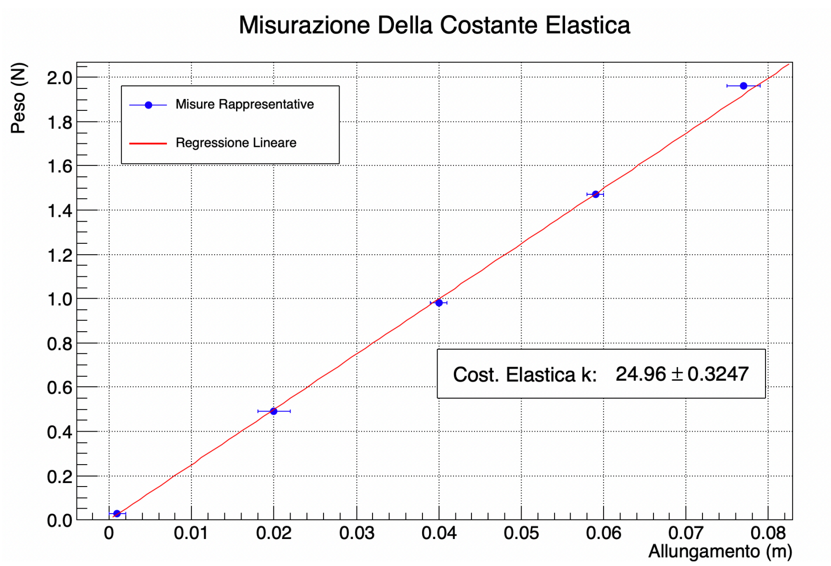

Figura 3: Grafico di *Root*, regressione lineare, gli errori nei pesi non sono visibili, ma si possono apprezzare nella *Tabella 2*.

Conclusione:
I dati ottenuti sono stati confrontati con quelli del software *Root*; considerando questi ultimi come valori attesi, perché molto precisi, i primi si sono rivelati compatibili con i secondi, poiché entrambi i risultati ottenuti rientrano rispettivamente nelle proprie bande d'errore (larghe circa 1.2% della misura).
L'errore su K nella prima misura è molto alto, tuttavia proprio grazie a questo essa ha un contributo pressoché nullo nella media pesata; difatti anche statisticamente parlando si tratta di un dato rigettabile.

Appendice e riferimenti bibliografici:

$$\delta {X_i}^2 = (semidisp.)^2 + (risoluzione)^2 \quad \delta {P_i}^2 = (g\delta m_i)^2 \quad \delta m_i = ris.bilancia$$

$$\left[\frac{\delta K_i}{K_i}\right]^2 = \left[\frac{\delta m_i}{m_i}\right]^2 + \left[\frac{\delta X_i}{X_i}\right]^2 \quad \delta \overline{K} = \frac{1}{\sqrt{\sum_i^5 w_i}}$$

[1] P. Fornasini "The Uncertainty in Physical Measurements" pag. 261 "Helicoidal Spring: Elastic Constant"