# Appunti di Teoria del Caos

Tratto da Ugo Amaldi, *La fisica del Caos,* Zanichelli Ed.

Ian Stewart, *Dio gioca a dadi?,* Bollati Boringhieri Ed.

Emma Castelnuovo, *Pentole, Ombre, Formiche*, La Nuova Italia Ed.

### *Introduzione*

Si elabora un programma di *iterazione* o si prende una calcolatrice, si calcola il quadrato di 0.54321, se ne elevi il valore ottenuto di nuovo al quadrato per 100 volte, si osserverà che dopo la 10-ma volta si ottiene zero.. Calcolando il coseno si otterrà 0.739085133 (anche con la tangente sembra si abbia un comportamento simile……..ma con 300 000 iterazioni? Problema dell'*intermittenza*). Con la radice quadrata convergerà verso 1, mentre con $f(x)=e^x$ se ne andrà ad infinito.. Il reciproco ( $x^{-1}$ ) ovviamente si alternerà tra due valori.

Proviamo ora con l'iterazione $x^2-1$ , convergerà a -1 ovviamente!…….e $2x^2-1$ ?

Proviamo a ripetere il tutto con x=0.54322 e vediamo cosa accade.

$\frac{7}{5}x^2-1$ passa per sedici *valori* diversi, $1.74x^2-1$ ha un comportamento caotico $1.75x^2-1$ dopo 50 iterazioni passa per tre valori (ha *periodo* tre). Sicuramente è da esplorare il campo dei coefficienti del termine al quadrato nell'intervallo (1 , 1.40155].

### *Caos*

Il caos è un comportamento *stocastico* (aleatorio) che si verifica in un *sistema deterministico* (regolato da leggi esatte ed inviolabili).

Anche la parola gas, coniata dal fisico medico von Helmont (1632), è stata modellata volutamente sulla parola greca *chàos*.

### *Ipotesi deterministica*

Date le condizioni iniziali, possiamo prevedere, posizione, velocità ed energia della particella, anche per termini lunghissimi di tempo. Cambiando di poco le condizioni iniziali, la previsione si discosta di poco (pendolo semplice, moto di due pianeti).

*Soluzione* (vita della particella) ottenuta per via analitica, es. funzioni.

### *Caos deterministico*

Cambiando di poco le condizioni iniziali, si ha un comportamento completamente diverso dalla

precedente previsione (tipo previsioni del tempo, pendolo doppio, problema dei tre pianeti).

Il comportamento in molti casi però non è completamente casuale e quindi imprevedibile, ma è caotico. Il *caos deterministico* permette di fare previsioni a breve termine.

La soluzione è ottenuta  per via numerica (passo, passo), es. frattali (ma se cambio di poco le condizioni iniziali di una curva iterativa altro che fiocco di neve, pensando alla curva di Koch, è il casuale!!)

## *Breve parentesi storica*

Tutto nasce con Poincaré, che fissa le basi di una nuova disciplina Matematica, la *topologia*. Piccole variazioni sulle condizioni di partenza possono produrre grandi mutazioni, si può dire che plasmando leggermente uno strato dell'impasto della pizza, l'impasto si può anche strappare. Per rappresentare questa fenomenologia di discontinuità è necessario parlare di affinità topologiche.

'La topologia è un tipo di geometria, ma una geometria in cui lunghezze, angoli e forme sono infinitamente mutevoli. ' Definiremo  topologiacmente uguali due figure che sono sovrapponibili attraverso trasformazioni continue (senza strappi). Le differenze tra le figure le fanno i *buchi* ed i *nodi*. Una ciambella è *congruente* ad una tazzina di caffè, ma non ad un foglio di plastica A4 (a meno che non sia bucato).

Poincarè solleva il problema della *deriva* di un sistema caotico  e il meteorologo  Edward Lorenz nel 1960, conia il nome *effetto farfalla* (variando di poco le condizioni iniziali si sconvolge il sistema).

'La persona media, vedendo che siamo in grado di predire abbastanza bene le maree con un anticipo di mesi, sarebbe indotta a chiedersi perché non possiamo fare lo stesso con l'atmosfera: dopo tutto si tratta di un sistema di fluido diverso e le leggi presentano grosso modo la stessa complicazione. Io mi resi conto però che *qualsiasi* sistema fisico che si comporti in modo non periodico è imprevedibile……..Il punto cruciale è allora se si siano verificate <<situazioni analoghe>> da quando si cominciò ad osservare lo stato dell'atmosfera. Per situazioni analoghe intendiamo due o più stati dell'atmosfera che si assomigliano con tanta precisione che le differenze possano essere attribuite a soli errori di osservazione.'

E. Lorenz

In sostanza i matematici creano la teoria non preoccupandosi delle sue possibili applicazioni ed uno stuolo di fisici, medici, metereologi e chi più ne ha più ne metta, trovano un mondo di applicazioni per quella che sembrava una semplice invenzione astratta.

## *Rappresentazione di un comportamento caotico*

**Per rappresentare e studiare un comportamento caotico io *distendo e piego***

Immaginiamo di voler preparare un impasto di pizza a mano, quando la pasta è piuttosto consistente faccio un'operazione ripetuta cioè *stendo* premendo con le mani e *piego*. Questa operazione è come se rimanesse in memoria nella struttura caotica dell'impasto di pizza che

otterremo con la lievitazione.

Quindi l'impasto ottenuto non sarà semplicemente una miscela casuale di farina acqua e lievito, ma sarà una miscela **caotica**, che potrò studiare analizzando le forme ottenute nello *stendere* e nel *piegare.*

La rappresentazione di un movimento caotico non avviene con il grafico dell'equazione di moto o dell'energia, ma con lo **spazio delle fasi:** asse *x* la posizione (se il moto è monodimensionale), asse *y* la quantità di moto per esempio.

Lo spazio delle fasi può avere molte dimensioni, ciò dipende dal tipo di moto o fenomeno che andiamo a studiare, se per esempio prendiamo una bicicletta, per la posizione ci sono tre coordinate (*x*,*y*,*z*) e la quantità di moto del centro di massa, poi aggiungiamo la rotazione del manubrio, quella delle ruote, quella dei due pedali e si arriva in breve ad uno spazio con 10 dimensioni.

Nello spazio delle fasi vengono rappresentate tutte le situazioni possibili ed emergono particolari configurazioni o punti che hanno delle proprietà importanti e si chiamano **punti stazionari.**

I punti stazionari sono classificati in tre tipi:

**(1) Pozzi** – punti di equilibrio stabile (se sposto le condizioni iniziali intorno al punto il sistema converge verso di esso, si chiamano anche *attrattori a punto fisso*).

**(2) Sorgenti** - punti di equilibrio instabile (se sposto le condizioni iniziali intorno al punto il sistema diverge verso altre configurazioni e non torna al punto di equilibrio,).

**(3) Punti di sella –** a seconda di come sposto le condizioni iniziali intorno al punto stazionario ottengo il comportamento del *pozzo* o della *sorgente*.

*Osservazione:* nello spazio delle fasi, le traiettorie di un fenomeno non si intersecano mai (uno stesso stato, fissate le condizioni di partenza, non può dare luogo a due stati diversi): si può avere una sola evoluzione dello stato una volta che siano state fissate le proprietà del sistema e le condizioni iniziali.

## *Attrattore*

**Verso quale configurazione evolve il sistema dinamico?**

- **punto fisso** dello spazio delle fasi verso il quale evolve il sistema (*configurazione statica*)
- **curva** (*ciclo limite*) nel caso in cui il sistema sia **aperto** (gli viene fornita continuamente energia dall'esterno)
- in generale è l'**insieme di stati** verso cui il sistema converge.

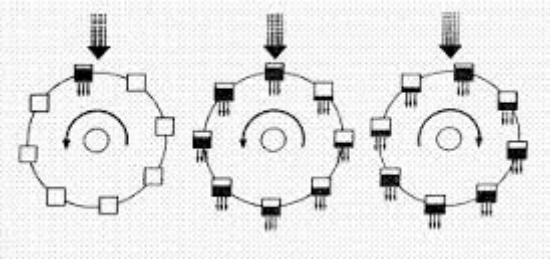
## *Attrattori normali*

Con *sistemi dissipativi*, il sistema evolve comunque ad un *punto fisso* (pendolo con attrito, dimensione del punto=0), oppure a un *ciclo limite* (circonferenza per pendolo con attrito ma

oscillazioni forzate, dimensione della curva =1), o anche a un *toro limite* (curva che giace su un toro composizione di due moti armonici esempio pendolo doppio, con attrito, con piccole oscillazioni forzate, due moti armonici quindi dimensione della superficie = 2).

Sistemi dinamici con comportamento caotico:

- il cuore sano;
- i fluidi in movimento;
- le pandemie;
- il mercato dei titoli;
- l'atmosfera e fenomeni meteorologici;
- alcune reazioni chimiche;
- circuiti elettronici oscillanti;
- fasci laser accoppiati;
- tasso di crescita *predatori* e *prede* in una stessa nicchia ecologica;
- Il moto su se stesso del satellite di Saturno, Iperione[1]
- movimento degli occhi nella lettura
- la ruota idraulica



https://www.cg.tuwien.ac.at/studentwork/VisSem97/Lorenz97/image/wwheel1.gif

## *Attrattori strani*

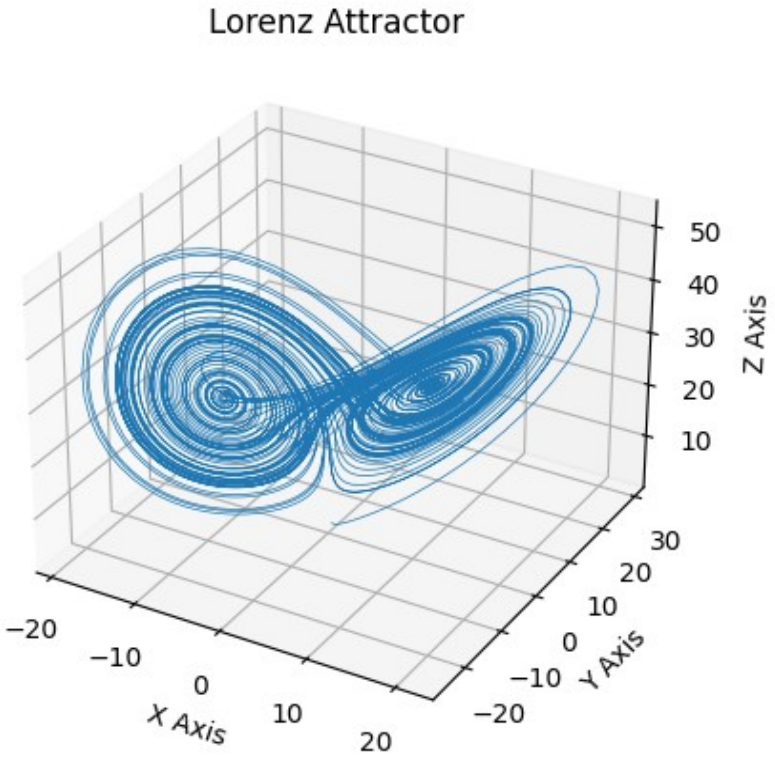
Con sistemi dissipativi caotici e aperti (tipo ruota idraulica; a seconda del flusso dell'acqua e dell'attrito del perno si possono avere effetti differenti, il regime di moto può essere periodico o caotico).

1 Satellite dalla conformazione irregolare, può essere visto come un libro molto spesso o un ellissoide. Questo ha tre assi di inerzia (il più lungo corrisponde all'asse di simmetria minore ed il più corto all'asse di simmetria maggiore. Le rotazioni attorno agli assi d'inerzia corto e lungo sono stabili, mentre le rotazioni attorno all'asse medio sono caotiche o instabili. Viene da pensare che tutti i pianeti all'inizio potevano avere movimento caotico che poi ha portato ad una certa regolarità, ma dura 'poco', cioè basta poco per rompere l'equilibrio.

Proiettando le figure tridimensionali sullo spazio delle fasi si ottiene, sia nel caso del ciclo limite che nel caso caotico, un grafico che fa pensare alla curva di Lorenz (effetto farfalla ). Gli attrattori strani sono curve di lunghezza infinita contenute in un volume finito dello spazio delle fasi. Figura geometrica che descrive l'andamento complessivo delle traiettorie del sistema nello spazio delle fasi, per fissati valori dei suoi parametri corrispondenti ad un comportamento caotico.

Il primo a studiare gli attrattori strani fu Lorenz, colpito da come possono cambiare i dati variando le condizioni iniziali anche solo di un milionesimo. Lorenz  considera una scatola con all'interno un fluido, più lunga e profonda che alta, mantenuta calda sul fondo e fredda sulla faccia di sopra e studia il sistema di vortici convettivi.

L'attrattore dei moti convettivi descrive una curva che è anche l'attrattore della ruota idraulica!!




https://matplotlib.org/3.3.1/_images/sphx_glr_lorenz_attractor_001.png

Osservazione: un attrattore strano può esistere solo in uno spazio delle fasi con dimensioni uguali o maggiori di tre. In uno spazio bidimensionale una traiettoria complessa può evolvere solo in un punto o un ciclo limite (moto periodico).

Nel 1977 Albert Libchaber aveva costruito una camera d’acciaio inossidabile minuscola e precisa, riempita di elio liquido. In alcuni punti fissati della camera, la temperatura veniva controllata usando dispositivi lillipuziani in zaffiro. Nella camera c’era spazio solo per un paio di tali strumenti di misura. Poi il fondo della cella veniva riscaldato, portandolo ad una temperatura superiore di una frazione di grado rispetto alla per più alta della cella stessa e creando in questo modo un’inversiione

termica che determinava un movimento di ascensione del fluido più caldo, mentre il fluido freddo scendeva. All’interno della sua piccola cella Libacher potè creare flussi convettivi quasi esenti dal rumore e misurarne il comportamento. ...Il fluido forma rulli cilindrici, disposti l’uno accanto all’altro . Ciascun cilindro ruota in direzione opposta a quello a fianco.

### *Esempi di dimensioni nello Spazio delle Fasi*

Pendolo semplice, dim. 2 (posizione e quantità di moto), moti convettivi dim. 3 (prendo un cilindro di liquido: $x$ è la velocità di rotazione del cilindro, $y$ è la differenza di temperatura tra correnti ascendenti e discendenti del cilindro, misurata lungo l'intersezione del cilindro con il piano mediano, $z$ è lo scostamento tra l'andamento effettivo della temperatura con l'altezza e l'andamento lineare atteso nel modello più semplice).

## Volumetti

dello spazio delle fasi descritti in piccoli intervalli di tempo possono subire 3 tipi di trasformazioni:

variazioni di dimensioni (a proporzioni costanti), deformazioni, rotazioni.

Osservazione: in un sistema *dissipativo che converge verso un attrattore normale* i volumetti dello spazio delle fasi diventano sempre più piccoli al trascorrere del tempo.

Studiare l'andamento dei volumetti ci permette di avere un'idea su come si comporterà il sistema caotico.

I volumetti, nel caso degli attrattori strani, si deformano e si ingrandiscono (gli stati vengono definiti dalle equazioni di Lorenz risolte in maniera iterativa), in particolare le differenze tra due traiettorie, date da due punti di partenza vicini, diventano significative quando i punti passano attraverso una **regione di sensibilità**, individuata nello spazio delle fasi.

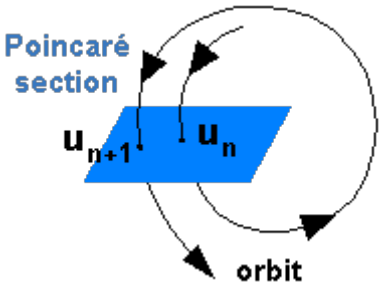
Osservazione: quando un sistema è caotico, in almeno una delle proiezioni dello spazio delle fasi i punti che rappresentano l'evoluzione temporale dei due stati inizialmente vicini, si allontanano in maniera esponenziale al trascorrere del tempo. *Il volumetto delle fasi si deforma e si schiaccia?*

### *Sezione di Poincarè*

Sezione ottenuta intersecando l'attrattore tridimensionale con un piano. Le intersezioni sono ottenute dalle equazioni di Lorenz, applicando un sofisticato metodo di iterazione numerica (matematico indiano Divanar Viswanath), che permette di seguire la traiettoria caotica:

per un lunghissimo tempo e con grandissima accuratezza.

Osservazione: ingrandendo anche di 25000 volte una sezione di Poincarè si osserva che le 'macchie' (figure di intersezione) sono fatte, a loro volta, da 'macchie' che hanno la stessa forma. *Figure simili con dettagli diversi*.




https://www.elmer.unibas.ch/pendulum/psection.gif

### *Frattale*

E' una figura geometrica che gode della proprietà di essere *invariante* per cambiamento di scala, di modo che un *motivo identico* si ripete su dimensioni *continuamente ridotte*. Ha una dimensione non intera compresa tra un punto ed una superficie (polvere di Cantor 0.6309, merletto di Koch 1.2619).

Il termine è stato coniato da Benoît Madelbrot (1924-2010) nel 1975 dal latino *fractus*, che vuol dire rotto o spezzato, famoso per il frattale che porta il suo nome.

Osservazione: gli attrattori strani sono enti geometrici frattali, ma non tutti i frattali sono attrattori strani.(La matematica supera la realtà!.....Oppure quella realtà non l'abbiamo ancora scoperta?).

Osservazione: ogni **attrattore strano** è un **frattale**, poiché:

- guardandolo con ingrandimenti crescenti, si osserva che esso è costituito da motivi che si ripetono a tutte le scale di modo che ogni parte è simile a un intero;
- la sua dimensione è pari ad un numero non intero.

### *Calcolo della dimensione della polvere di Cantor(1845-1918)*

http://www.batmath.it/matematica/a_cantor/images/pg1.ht5.gif

E' il primo frattale della storia matematica: a ogni stadio si dividono i segmenti in tre parti uguali e poi si cancella la parte centrale e si inizia con un segmento.

Dopo *n* iterazioni si ottiene un insieme fatto di $2^n$ segmenti uguali, ciascuno lungo $\frac{1}{3^n}$. Per riottenere il segmento iniziale basta moltiplicare uno di questi segmentini per $3^n$ (avendo supposto che la lunghezza iniziale del segmento sia 1).

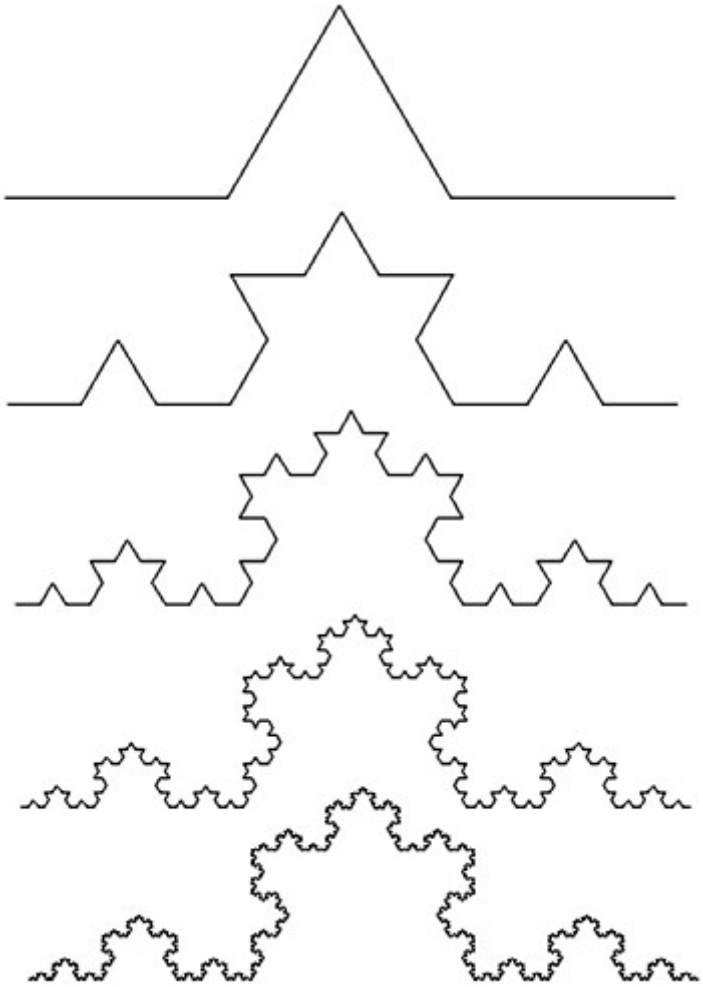
Quando si divide una curva, superficie o volume in parti uguali o autosimili il

*numero delle parti uguali*= fattore di in*grandimento* (il fattore moltiplicativo necessario per riottenere la figura di partenza nel nostro caso $3^n$ ) elevato alla *dimensione della figura di arrivo.*

Quindi $$2^n = \left(3^n\right)^D$$

$$n \ln 2 = nDnl\,3 \rightarrow D = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.6309\ldots \quad .$$

### *Calcolo della dimensione della curva di Koch*



http://i0.wp.com/blog.zacharyabel.com/wp-content/uploads/2011/12/TM-turtle-koch.gif?resize=600%2C400

Dopo *n* iterazioni si ottiene un insieme fatto di $4^n$ segmenti uguali, ciascuno lungo $\frac{1}{3^n}$ . Per riottenere il segmento iniziale basta moltiplicare uno di questi segmentini per $3^n$ (avendo supposto che la lunghezza iniziale del segmento sia 1).

Quando si divide una curva, superficie o volume in parti uguali o autosimili il

*numero delle parti uguali*= fattore di in*grandimento* (il fattore moltiplicativo necessario per riottenere la figura di partenza nel nostro caso $3^n$ ) elevato alla *dimensione della figura di arrivo.*

Quindi $$4^n = \left(3^n\right)^D$$

$$n \ln 4 = nDnl\,3 \rightarrow D = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1.261859\ldots \quad .$$

## *Esempi di equazioni per comportamenti caotici*

Vortici di Lorenz:
$$\begin{aligned} \Delta x &= A(y-x)\Delta t \\ \Delta y &= (Bx - y - xz)\Delta t \\ \Delta z &= (xy - Cz)\Delta t \end{aligned}$$

Sistema di Rössler:
$$\begin{aligned} \Delta x &= -(y+z)\Delta t \\ \Delta y &= (x + Ay)\Delta t \\ \Delta z &= [B + (x-C)z]\Delta t \end{aligned} \quad .$$

Questi due sistemi vengono applicati per rappresentare fenomeni fisici differenti e variano comportamento nello spazio delle fasi a seconda dei parametri *A,B,C*.

Si tratta di dinamiche non lineari (2 equazioni non lineari sulla prima e una sulla seconda) quindi nell'analisi dei dati , non si potranno applicare le nozioni comuni ma si ricorrerà a diverse interpretazioni matematiche (come per esempio nel calcolare la media delle velocità in un tratto *x* non calcoleremo la media aritmetica, ma useremo quella geometrica).

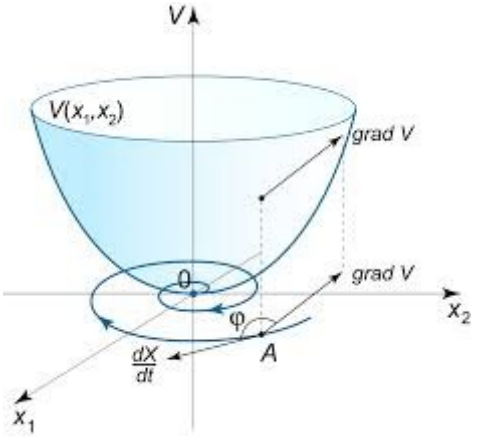
Il secondo sistema si distingue dal primo non solo per le espressioni diverse ma anche per il fatto che contiene un solo termine non lineare (*xz*) mentre l'altro ne ha due.

Quando si crea una piccola differenza nelle condizioni iniziali (tipo un miliardesimo di differenza sul valore iniziale) per i primi passaggi, nel tempo, non si nota una grande differenza, cioè non ci si discosta dal comportamento noto. Più si va avanti nel tempo, più si va nel particolare (si ingrandisce la scala) e più l'*effetto farfalla* si farà sentire con *effetto a cascata*.

La rappresentazione grafica è in entrambi i casi un'**ellissoide** e i suoi assi variano secondo un andamento esponenziale in funzione del tempo con un'espressione del tipo $a = a_1 e^{\lambda t}$ . Il coefficiente della *t*, viene chiamato **esponente di Ljapunov[2],** dal fisico russo che, 100 anni prima di Lorenz, condusse importanti studi sulla stabilità dei punti di equilibrio di sistemi non dinamici.

2 È il logaritmo del *fattore di allontanamento* o errore che viene maturato nel tempo quando le condizioni iniziali vengono modificate di poco.

Gli esponenti di Lyapunov hanno un ruolo rilevante per lo studio delle proprietà degli attrattori.



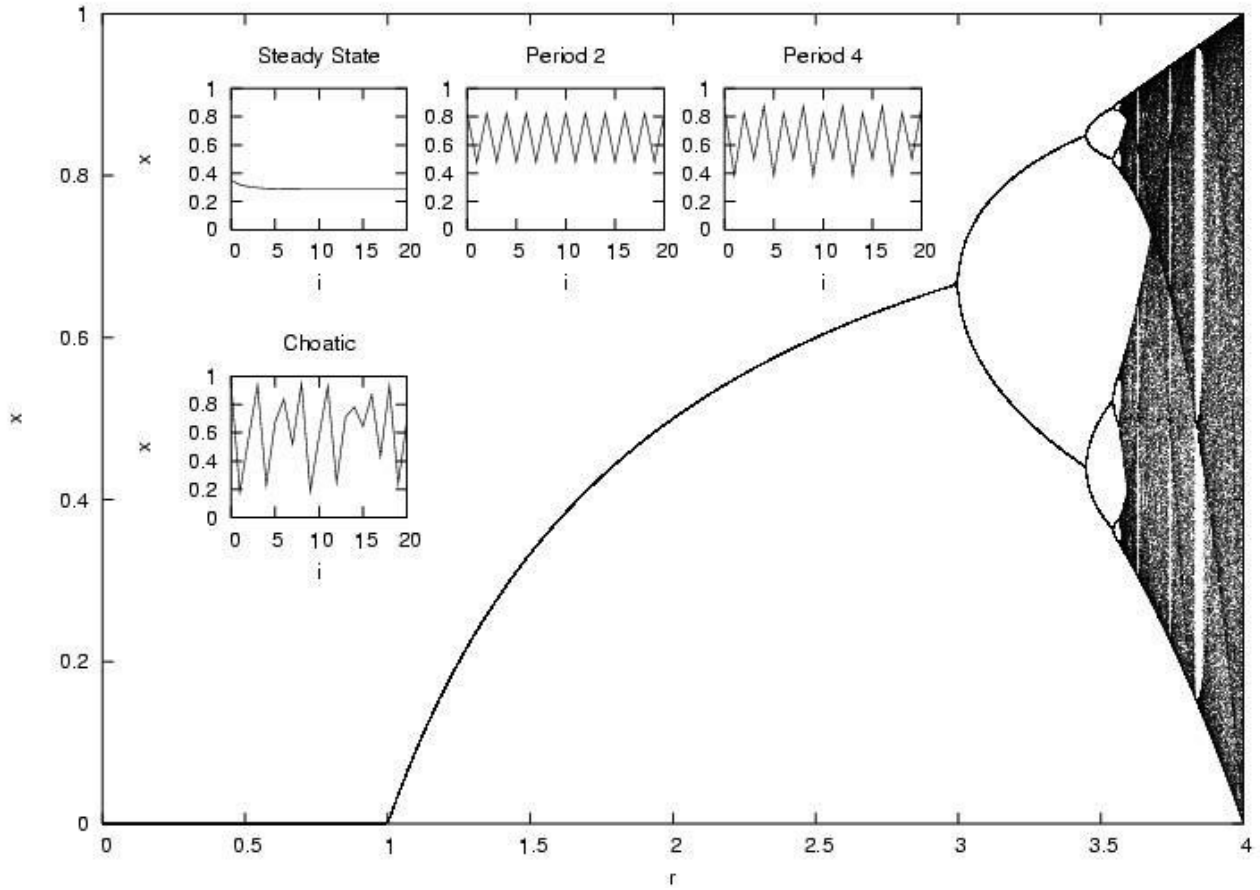

http://i0.wp.com/blog.zacharyabel.com/wp-content/uploads/2011/12/TM-turtle-koch.gif?resize=600%2C400

In conclusione un sistema dinamico dissipativo può manifestare comportamenti caotici o non caotici a seconda dei valori assegnati ai parametri nelle equazioni non lineari che lo descrivono. Al variare monotono di un parametro, mentre gli altri sono fissati, si alternano attrattori strani (caotici) ad attrattori normali (cicli limite). I cicli compaiono con un numero crescente di spire (o ritorni) e con periodi che sono multipli del periodo misurato quando la traiettoria si chiude al primo ritorno.

## *Liste di primo ritorno e diagrammi di biforcazione*

Le prime sono liste di valori di massimo ottenuto variando uno o più parametri di controllo e considerando la proiezione su un piano (per es. *xy*), si tratta dei massimi (per es. $x_{max}$ ) ottenuti a seconda del numero di ritorni che registra il sistema (il sistema si muove su curve che ritornano: pensa alla curva di Lorenz, cioè la farfalla).

Il secondo consiste in una curva che ha per asse *y*, i valori di massimo per le liste e per asse *x*, il valore del parametro. Dove il diagramma si biforca passando ad un numero maggiore di massimi. Tra una biforcazione e l'altra (tra un valore del parametro all'altro) il sistema passa da caotico a ciclico (possiamo individuare delle zone senza caos, con caos localizzato, con caos completo) e viceversa.




http://www.mathewpeet.org/science/chaos/

*Sistema caotico di Sprott*

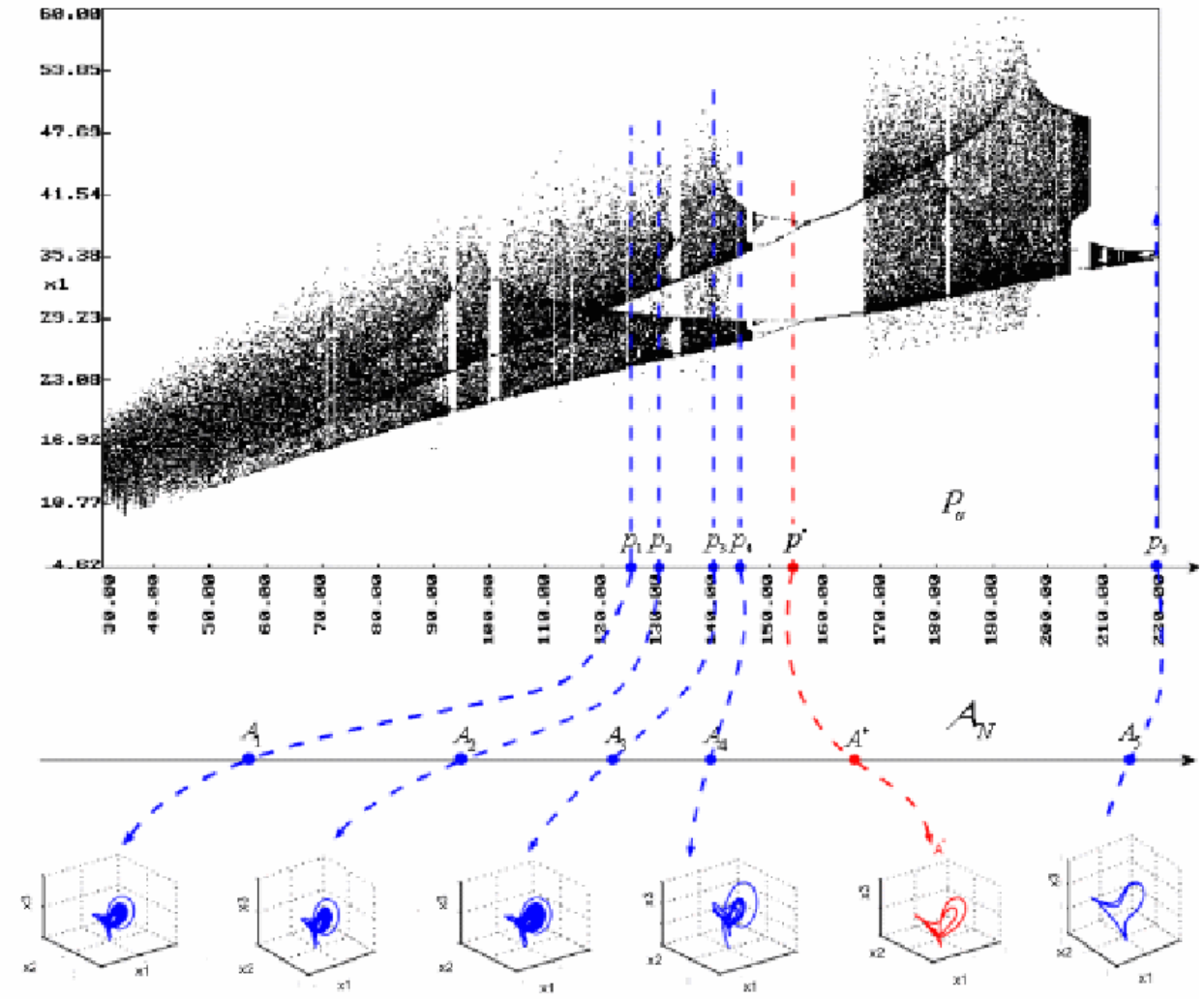
I grafici di biforcazione hanno le seguenti proprietà:

1. sono autosomili (il comportamento caotico *ha memoria* del comportamento precedente);
2. sono frattali
3. Per moltissimi casi caotici (compreso quello di Sprott), le catene di biforcazione sono determinate da un solo numero: **la costante di Feigenbaum** (rapporto tra le distanze tra due biforcazioni successive, lo potremmo definire un *rapporto di scala*, **4,669201609…... numero trascendente!!!**). E' come aver trovato una *regolarità*, una proprietà comune a tante situazioni diverse, è un'invariante molto importante perché tante situazioni caotiche potrebbero comportamenti simili ed essere raggruppate in un caso unico, con medesime previsioni nel futuro.

Le esperienze di Lorenz, Libchaber, ogni sorta di sistema fisico elettronico, ottico e biologico non fanno che confermare la scoperta di Fiegenbaum, quindi il caos non è sempre *casuale*, anzi in moltissimi casi è *deterministico*.

### *Biforcazioni del sistema di Lorenz*

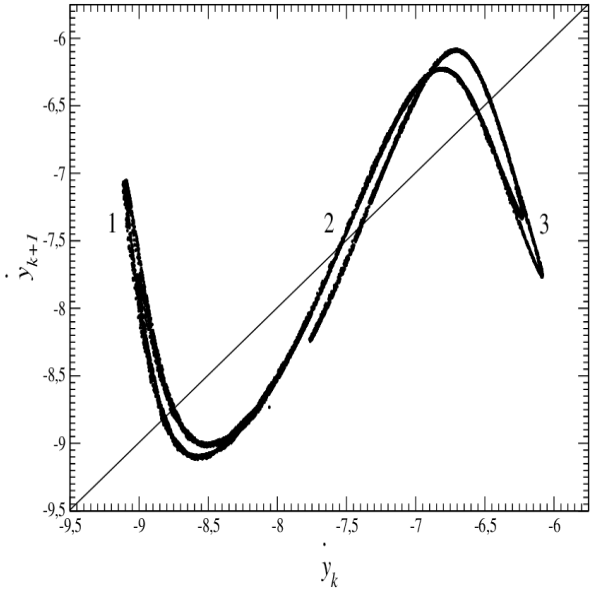
Quando il parametro B varia tra 150 e 180 il sistema si evolve in un ciclo che ha al massimo otto




https://www.researchgate.net/publication/48205200_Finding_Attractors_of_Continuous-Time_Systems_by_Parameter_Switching

ritorni diversi (cioè 8 massimi), per B=122 il sistema è caotico. Vedasi il grafico sottostante.Mappa di primo ritorno

Si rappresenta nel piano, scorrendo la lista, un punto che ha per *y* il valore $x_{max}$ fissato e per *x* il valore che lo precede nella lista dei massimi (ovviamente in un sistema ciclico non caotico la curva è rappresentata da un punto). Se il sistema è caotico siamo di fronte ad una curva frattale (il grafico a volte, per autosomiglianza, può essere scambiato per una curva lineare ed è solo ingrandendo l'immagine che si coglie la natura frattale di esso).




https://www.researchgate.net/profile/Luis_Aguirre7/publication/227304867/figure/download/fig3/AS:667905251348492@1536252429867/First-return-map-to-a-Poincare-section-of-the-chaotic-attractor-solution-to-the-global.png

### *Modelli di sistemi dinamici a tempo discreto*

Si tratta di modelli matematici che simulano eventi naturali individuando, via via, un numero diverso di variabili discrete. Avendo osservato che il modello è un esponente di Lyapunov si possono registrare nuovi comportamenti e situazioni.

Il primo modello dinamico a tempo discreto è, probabilmente, quello che descrive l'evoluzione di una popolazione di conigli. La mappa di Fibonacci (XII sec.) ne è la soluzione: ottenuta con la successione di Fibonacci.

*Regole:* all'inizio abbiamo una coppia di conigli, ogni coppia di conigli diventa feconda dopo due mesi, ciascuna coppia ogni mese genera una seconda coppia. L'andamento della mappa, cioè i numeri di Fibonacci, tornano nel numero delle spirali di un girasole, anche in quelle delle pigne e dei cavolfiori.

Moran e Ricke arricchiscono il problema dell'aumento della popolazione inserendo come parametri il *cibo a disposizione* e la *diversa prolificità* degli individui e studiano l'aumento di popolazione del salmone. Dalla mappa (mappa di Moran e Ricke) deducono il numero di salmoni che può permettere, nel sistema, una situazione stabile (non aumenti e diminuzioni sistematiche di popolazione). Non è detto che nel tempo si possa raggiungere sempre una situazione stabile (attrattore un punto), Ciò dipende anche dal livello (parametro) di prolificità dei salmoni. In questo

caso per studiare meglio le situazioni possibili in funzione della prolificità si passa a studiare il grafico di biforcazione.

Osservazione: I sistemi dinamici a tempo continuo e quelli a tempo discreto hanno grafici di biforcazione molto simili.

Dalla **mappa logistica** $X_S = A X(1-X) \quad X \in [0,1]$ (A è il parametro) è possibile risalire all'esponente di Lyapunov anche per una mappa a termini discreti.

### *Il rubinetto che perde*

Perde in maniera caotica e lo studiamo con una mappa di primo ritorno: misuriamo il diametro del rubinetto, e variamo il *parametro di controllo* dato dal numero di gocce per secondo (da circa 4 gocce/s a circa 15 gocce/sec) al variare di questo troviamo i punti della mappa facendo corrispondere nelle ordinate l'intervallo di tempo che separa la caduta di ciascuna goccia dalla successiva. Si dovrebbe registrare un sistema sempre più caotico all'aumentare della frequenza.

### *Cuore sano e cure malato*

Altro esperimento: la frequenza dei battiti in funzione del tempo (battiti al minuto) appare autosimile per intervalli di tempo differenti (1,10,100 minuti, si divida ciascun intervallo in 5 parti) e non assume mai caratteristiche periodiche.

Un cuore malato (insufficienza cardiaca per es.) assume caratteristiche di grafico periodico, il defibrillatore ha la funzione di generare una aritmia che permetta di portare il cuore da un ritmo *inefficace* (cioè non pompa abbastanza sangue nei tessuti) ad un ritmo caotico e quindi efficace.

### *Criticità dei modelli matematici caotici per l'interpretazione dei fenomeni naturali*

1. a volte sono troppo grossolani;
2. a volte il numero *n* di variabili è talmente grande che non è possibile studiare il fenomeno neanche utilizzando potenti calcolatori.

### *Il sistema solare*

E' un sistema caotico per esempio nell'eccentricità delle orbite dei pianeti se il parametro di riferimento varia nell'ordine di miliardi di anni (da 0 a 20).

Osservazioni:

- il sistema solare ha un'età di 4,6 miliardi di anni e tra 5 il Sole diventerà una gigante rossa;
- per il nostro intervallo di vita sulla Terra va tutto bene;
- il Sistema Solare (inteso come il Sole ed i suoi 8 satelliti) è un modello di 54 dimensioni!
- ogni corpo celeste è descritto da 6 variabili dinamiche (tre coordinate e tre componenti della quantità di moto).

### *Fenomeni turbolenti*

Turbolenza nei fluidi, il flusso da laminare diventa vorticoso. E' stato scoperto che la velocità del fluido è un parametro non trascurabile.

### *Previsioni meteorologiche*

Variabili: pressione, umidità dell'aria, temperatura, pioggia, direzione e velocità del vento. A seconda delle condizioni iniziali si hanno previsioni più attendibili o meno. Ci sono milioni di centraline meteorologiche nel mondo che raccolgono i dati. L'ECMWF a sessanta chilometri da Londra, con il più potente computer del mondo (quasi 10000 CPU), elabora i dati e fornisce le previsioni. Si arriva bene fino a 7, 10 giorni.

### *Satelliti a controllo caotico*

Sappiamo che il problema dei tre corpi non può essere risolto a livello deterministico, ma sappiamo anche che si può determinare l'effetto farfalla semplicemente variando di poco i parametri del corpo in rotazione attorno ad altri due, quindi coprire grandi distanze con il minimo sforzo.

Proprio utilizzando tali considerazioni, nel 1985, si poté studiare per la prima volta una cometa molto da vicino. La si fece avvicinare dal satellite *morto* ISEE.3/ICE. Il satellite aveva finito di adempiere alle sue funzioni ed era rimasto decisamente poco carburante, sicuramente non sufficiente a coprire gli 80 000 000 di km che lo separavano dal punto d'incontro con la cometa.

Gli ingegneri decisero quindi di utilizzare il poco carburante rimasto, per fargli fare piccoli spostamenti e, giocando sull'attrazione Terrestre e Lunare, produrre un effetto farfalla che gli potesse consentire di percorrere, senza carburante lo spazio preposto e…. andò bene.

Stessa cosa fu fatta poi per la cometa di Halley, che ricevette la visita di ben 5 satelliti: due russi, due giapponesi e una europea.

Con questo sistema la sonda *Galileo* è arrivata su Giove (non c'era carburante a sufficienza per un viaggio diretto perché avevano tagliato i fondi).

### *Problemi epistemologici del caos applicato alla fisica*

Secondo la fisica moderna una legge è valida finché non viene contraddetta con esperimenti, e fin qui tutto bene, ma un esperimento per essere valido deve essere ripetibile e qui vengono i guai

perché gli esperimenti caotici non sono ripetibili, basta una lievissima modifica dei parametri e sopraggiunge l'effetto farfalla. Quindi *va modificato profondamente il metodo sperimentale.*

## *La teoria della complessità*

I sistemi troppo semplici non sopravvivono nell'eco-sistema perché sarebbero prevedibili e quindi facili prede, i sistemi casuali neanche perché non sarebbero in grado di evolversi, cioè non raggiungerebbero un comportamento coerente, i sistemi evolutivi sono costretti, quindi, a collocarsi sul margine del caos. La teoria che studia questi fenomeni si chiama *teoria della complessità.*